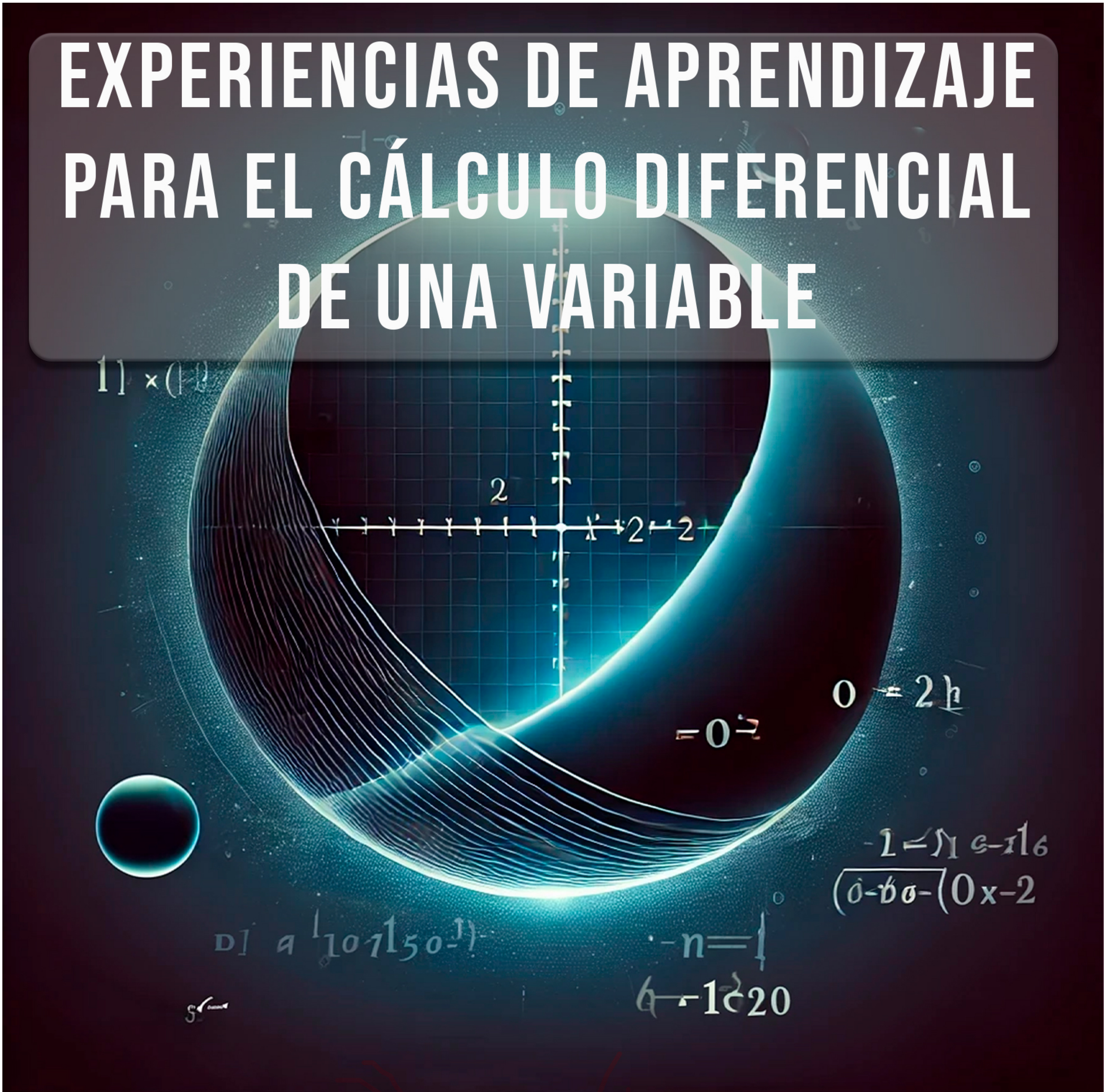
EXPERIENCIAS DE APRENDIZAJE PARA EL CÁLCULO DIFERENCIAL DE UNA VARIABLE



Universidad de Sucre

UNISUCRE EDITORIAL

ROBERTO CARLOS TORRES PEÑA
SANDRA PATRICIA ROJAS SEVILLA
MARÍA FERNANDA SIERRA CARRILLO

Experiencias de aprendizaje para el cálculo diferencial de una variable

Roberto Carlos Torres Peña
Sandra Patricia Rojas Sevilla
María Fernanda Sierra Carrillo

Universidad de Sucre
Departamento de Matemáticas
2024

Torres Peña, Roberto Carlos y otros
Experiencias de aprendizaje para el cálculo diferencial de una variable / Roberto Carlos Torres Peña, Sandra Patricia Rojas Sevilla, María Fernanda Sierra Carrillo --Primera edición. --Sincelejo: Editorial Unisucre, 2024.
229 páginas, ilustraciones, gráficas.
Incluye referencias bibliográficas.
ISBN: 978-628-95009-8-1
1. Cálculo Diferencial 2. Cálculo Diferencial - Aprendizaje. 3. Cálculo. I. Rojas Sevilla, Sandra Patricia. II. Sierra Carrillo, María Fernanda. III. Título
515.33 T693
CDD 20 ed.

Catalogación en publicación de la Biblioteca Pompeyo Molina - COSiUS

Área: Matemáticas.

1era edición:

editorial@unisucre.edu.co
Cra. 28 # 5 – 267 Barrio Puerta Roja. Cel. 3002040181
Sincelejo, Sucre, Colombia
ISBN: 978-628-95009-8-1
Coordinación editorial: Pedro Caraballo
Diagramación: Manuel Tamara
Diseño de Portada: Autores
Universidad de Sucre.

Prólogo

El contexto histórico en el que surgió el cálculo diferencial, estaba marcado por avances científicos y un creciente interés en comprender el movimiento y el cambio. Entre los problemas más importantes que dieron impulso al desarrollo del cálculo diferencial, se encontraban el cálculo de la velocidad de un objeto en movimiento, la determinación de la recta tangente a una curva, el cálculo del área bajo una curva y la búsqueda de los máximos y mínimos de funciones. Estas cuestiones, que hoy en día forman parte del núcleo del cálculo, en ese entonces representaban grandes desafíos para los matemáticos.

Fue en el siglo XVII cuando finalmente se aclararon estos problemas con la definición formal del cálculo infinitesimal por parte de Newton y Leibniz. Cada uno de ellos desarrolló de manera independiente una notación y un enfoque que, aunque distintos en su forma, eran equivalentes en su esencia. Newton abordó el cálculo desde el punto de vista de las tasas de cambio, en particular en relación con la física y el movimiento de los cuerpos, mientras que Leibniz se centró en la notación y el tratamiento formal de las sumas infinitesimales, lo que facilitó su aplicación en problemas matemáticos más abstractos.

Antes de los trabajos de Newton y Leibniz, otros matemáticos ya habían hecho contribuciones significativas que prepararon el terreno para el desarrollo del cálculo. Pierre de Fermat, por ejemplo, había desarrollado un método para encontrar máximos y mínimos de funciones, que más tarde sería reconocido como una forma temprana del cálculo diferencial. René Descartes, conocido por su trabajo en geometría analítica, proporcionó herramientas para el estudio de las curvas, lo que sería esencial para el desarrollo posterior del cálculo. Christiaan Huygens, otro matemático destacado, trabajó en la comprensión de las leyes del movimiento, mientras que Isaac Barrow, maestro de Newton, desarrolló importantes ideas sobre la tangencia y las áreas bajo curvas, anticipando conceptos clave del cálculo.

El cálculo diferencial permitió resolver problemas que hasta ese momento parecían inalcanzables. Su desarrollo marcó el inicio de una nueva era en la matemática y la ciencia, facilitando avances en campos como la física, la ingeniería y la astronomía. La capacidad para modelar matemáticamente fenómenos que involucran cambio continuo, como el movimiento de los planetas, la expansión de gases o el crecimiento de poblaciones, es una de las razones por las cuales el cálculo diferencial ha tenido un impacto tan profundo en el desarrollo del conocimiento científico.

El libro “Experiencias de aprendizaje para el Cálculo diferencial de una variable”; surge como una respuesta a la necesidad de materiales educativos innovadores, que faciliten acceso la comprensión y aplicación del curso de Cálculo diferencial. A través de experiencias cuidadosamente diseñadas, el libro guía a los estudiantes en un proceso activo y significativo de aprendizaje, permitiéndoles construir su propio conocimiento a partir de la exploración, experimentación y reflexión. Las actividades propuestas abordan los conceptos a partir de situaciones simples que guían al lector a construir el conocimiento desde lo simple hasta lo complejo, por lo que promueven el desarrollo de habilidades esenciales para el aprendizaje del Cálculo diferencial, como el pensamiento crítico, la creatividad, la comunicación y el trabajo en equipo.

Asimismo, el enfoque centrado en el estudiante, convierte al libro en una herramienta valiosa para docentes y estudiantes, permitiendo que el cálculo diferencial deje de ser un curso abstracto y se convierta en una herramienta poderosa para comprender y analizar situaciones que involucran relaciones de variación y cambio. En el libro subyacen las principales tendencias del campo de la Educación Matemática, acerca de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, con el fin de plantear estrategias para eliminar barreras de aprendizaje, como la cuestión angular fuertemente vinculada al formalismo de los conceptos de Cálculo y a las dificultades que genera en el proceso de aprendizaje y enseñanza.

El libro aborda el desfase real entre los conocimientos previos de los estudiantes y los fundamentos matemáticos de los conceptos de Cálculo. A partir de estudios sobre la comprensión conceptual del cálculo diferencial, que identifican obstáculos epistemológicos estrechamente relacionados con los infinitesimales y el infinito, se destaca que superar estos obstáculos es clave para lograr una comprensión profunda. Precisamente por ello, la presentación de las actividades pedagógicas en este texto se enfoca en facilitar dicho proceso.

Los autores

LOS AUTORES

Roberto Carlos Torres Peña

rtorres@unimagdalena.edu.co

Profesor de planta e investigador de la Universidad del Magdalena, en la línea de investigación resolución de problemas y desarrollo del pensamiento matemático. Doctor en Educación Matemática, Magister en Matemática y Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas. Desde el año 2005, ha sido docente de la Universidad del Magdalena, orientando cursos de matemáticas y didáctica de las matemáticas en pregrado y posgrado. Asimismo, ha liderado la elaboración de los documentos necesarios para el registro calificado de los programas de Licenciatura en Matemáticas y Maestría en Enseñanza de las Matemáticas en la misma universidad.

Sandra Patricia Rojas Sevilla

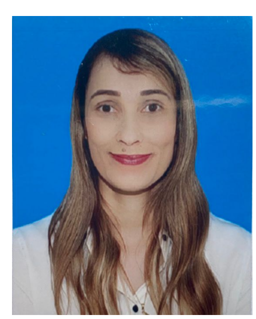
sandra.rojas@unisucre.edu.co

Profesora de planta de la Universidad de Sucre, adscrita al Departamento de Matemáticas. Integra el grupo de investigación Proyecto Pedagógico-PROPED. Doctora en Educación Matemática por la Universidad Antonio Nariño, Magíster en Matemáticas Aplicadas, Especialista en Matemáticas y Licenciada en Matemáticas, egresada de la Universidad de Sucre. Dirige la línea de investigación "Oportunidades de Aprendizaje de Calidad de las Matemáticas Escolares en Contextos Rurales". Ha sido designada como representante del Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) en Colombia. Desde el año 2006, ha impartido cursos como Análisis Numérico, Álgebra Lineal, Cálculo Integral, Cálculo Diferencial, entre otros.

María Fernanda Sierra Carrillo

maria.sierra@unisucre.edu.co

Profesora Titular de la Universidad de Sucre, adscrita al Departamento de Matemáticas y miembro activo del grupo de investigación Proyecto Pedagógico – PROPED. Es Matemático y Magíster en Ciencias Matemáticas por la Universidad Nacional de Colombia. A lo largo de su carrera, ha publicado diversos artículos científicos en revistas especializadas. Desde el año 2008, ha impartido cursos como Cálculo Diferencial, Álgebra Abstracta y Ecuaciones Diferenciales, entre otras. Su experiencia académica y su dedicación la han consolidado como una figura clave en la formación de futuros profesionales en el campo de las matemáticas.



Índice general

1 Conocimientos previos **13**
1.1 Introducción a los números reales . . . 15
1.1.1 Un poco de conceptualización . . . 18
1.1.2 Definición de valor absoluto . . . 20
1.1.3 Intervalos en $\mathbb{R}$ . . . 21
1.2 Introducción a la geometría analítica . . . 24
1.2.1 El plano cartesiano . . . 27
1.2.2 Distancia entre dos puntos . . . 29
1.2.3 Punto medio . . . 37
1.2.4 La línea recta . . . 41
1.2.5 Ecuación de la recta . . . 41
1.2.6 Perpendicularidad y paralelismo . . . 44
1.2.7 Circunferencias . . . 46
1.2.8 Parábolas . . . 50
1.2.9 Elipses . . . 54
1.2.10 Hipérbolas . . . 56
1.3 Guía de trabajo 1 . . . 60

2 Funciones **63**
2.1 Construcción del concepto de función . . . 69
2.2 Gráfica de una función f en un plano cartesiano . . . 72
2.3 Funciones definidas por ramas . . . 76
2.4 Simetría: funciones pares e impares . . . 77
2.5 Funciones crecientes y decrecientes . . . 80
2.6 Ejemplo de funciones reales . . . 83
2.6.1 Función constante . . . 83
2.6.2 Función lineal . . . 83
2.6.3 Función afín . . . 85
2.6.4 Función cuadrática . . . 86
2.6.5 Funciones exponenciales . . . 89
2.6.6 Funciones logarítmicas . . . 90

2.6.7 Funciones trigonométricas 90
2.7 ¿Cómo determinar el dominio de una función real? 92
2.8 Funciones como modelos matemáticos 94
2.9 Funciones compuestas 100
2.10 Inversa de una función 101
2.11 Guía de trabajo 2 105

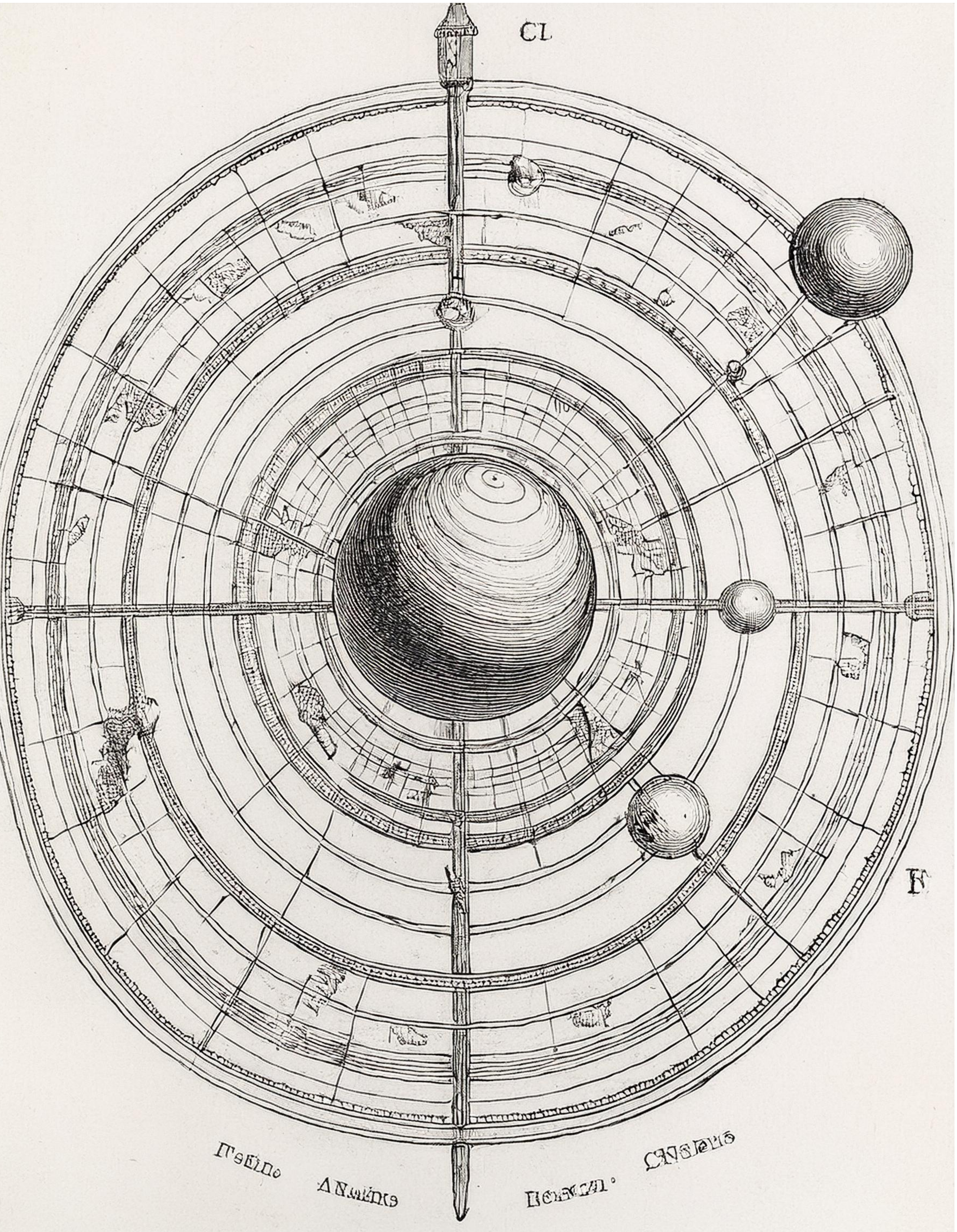
3 Límites 115

3.1 Construcción del concepto de límite 121
3.2 Límites laterales 126
3.3 Límites trigonométricos 130
3.4 Límites en el infinito 133
3.5 Asíntotas horizontales 134
3.6 Asíntotas verticales 134
3.7 Límites infinitos en el infinito 135
3.8 Otras formas indeterminadas 137
3.9 Asíntotas oblícuas 138
3.10 Continuidad 139
3.11 Guia de trabajo 3 141

4 Derivadas 149

4.1 Variación y cambio 152
4.2 Razón promedio de cambio 153
4.3 Razón instantánea de cambio 158
4.4 Construcción del concepto de derivada 159
4.5 Diferenciabilidad 162
4.6 Reglas de derivación 165
4.7 Derivada de una función constante 165
4.8 Derivada de una función potencia 165
4.9 Derivada de una suma o diferencia de funciones 166
4.10 Reglas de derivación de productos y cocientes 166
4.11 Regla del producto 166
4.12 Regla del cociente 167
4.13 Derivadas conocidas 171
4.14 Derivadas de orden superior 172
4.15 Regla de la cadena 173
4.16 Derivación Implícita 176
4.17 Aplicaciones de la derivada a tasas relacionadas 178
4.18 Aplicaciones de la derivada 181
4.18.1 Valores extremos 181
4.18.2 Valores críticos 182

4.18.3 Teorema del valor extremo 183
4.18.4 Teorema de Rolle 184
4.18.5 Teorema del valor medio 185
4.18.6 Criterio de la derivada para funciones crecientes y decrecientes 186
4.18.7 Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos . . . 188
4.18.8 Puntos de inflexión 189
4.18.9 Concavidad 190
4.18.10 Criterio de la segunda derivada para concavidad 191
4.18.11 Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos. . . . 192
4.19 Guia de trabajo 4 196
4.20 Optimización 206
4.20.1 Proceso de optimización 206
4.21 Guia de trabajo 5 216


CL
F

Introducción

El cálculo diferencial de una variable es una parte fundamental de las matemáticas en programas de educación superior relacionados con las ciencias básicas, ingeniería y por su puesto para los programas de licenciatura en matemáticas o afines. Desde su concepción, ha permitido estudiar a profundidad los misterios del cambio y el movimiento, dotando a científicos, ingenieros y matemáticos de una herramienta poderosa para analizar y modelar fenómenos naturales y artificios creados por el hombre. Este libro, titulado "Experiencias de Aprendizaje para el Cálculo Diferencial de una Variable", se presenta como una guía integral diseñada específicamente para facilitar el aprendizaje y la comprensión profunda de los conceptos relacionados con el cálculo diferencial.

El enfoque pedagógico adoptado en este texto es innovador y centrado en el estudiante. Cada capítulo está meticulosamente estructurado para no solo impartir conocimiento, sino también para involucrar activamente al lector en el proceso de aprendizaje. Esto se logra mediante la inclusión de objetivos de aprendizaje claros al inicio de cada sección, junto con actividades de activación de saberes previos que permiten a los estudiantes conectar conceptos nuevos con conocimientos ya adquiridos. Estas características hacen del libro una herramienta interactiva y dinámica, ideal para la enseñanza efectiva y el aprendizaje guiado.

El primer capítulo de este libro se dedica un pequeño espacio al estudio de los números reales, estableciendo una base sólida sobre la cual se construirá todo el aprendizaje posterior. La comprensión de los números reales es esencial en este texto ya que en el se trata el análisis de las funciones reales de una variable real. El segundo capítulo introduce el concepto de funciones y los diferentes tipos de funciones que se encuentran en el cálculo diferencial. Las funciones son el eje central del cálculo, ya que describen la relación entre dos variables, permitiendo así el estudio del cambio y la variación. Este capítulo explora diversas clases de funciones, tales como funciones polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, proporcionando ejemplos y ejercicios que ayudan a consolidar la comprensión de sus propiedades y comportamientos. El tercer capítulo se adentra en el concepto de límite y continuidad. El límite es una noción central en el cálculo, ya que proporciona una manera precisa de describir el comportamiento de las funciones a medida que las variables se acercan a ciertos valores. La continuidad, por su parte, describe las funciones que no presentan saltos ni interrupciones, lo cual es una propiedad deseable en muchos contextos matemáticos y prácticos. A través de ejemplos intuitivos, demostraciones formales y ejercicios aplicados, este capítulo guía al lector en la comprensión profunda de estos conceptos esenciales.

El cuarto capítulo aborda el concepto de derivada, que es quizás el aspecto más distintivo y crucial del cálculo diferencial. La derivada mide la tasa de cambio de una función con respecto a una variable, proporcionando una herramienta poderosa para analizar fenómenos dinámicos. Este capítulo explora la definición formal de la derivada, las reglas de diferenciación, y las derivadas de funciones elementales. Además, se presentan problemas resueltos y ejercicios prácticos que permiten al estudiante dominar las técnicas de diferenciación y comprender sus aplicaciones. Finalmente, el quinto capítulo se centra en las aplicaciones de la derivada. Aquí, el lector descubre cómo las derivadas se utilizan para resolver problemas prácticos en diversas disciplinas. Entre las aplicaciones tratadas se encuentran la optimización de funciones, el análisis de puntos críticos, la determinación de intervalos de crecimiento y decrecimiento, y la resolución de problemas de movimiento y cambio. Este capítulo no solo muestra la utilidad del cálculo diferencial en contextos teóricos, sino también su aplicabilidad en situaciones del mundo real.

Además de su contenido riguroso y bien estructurado, "Experiencias de Aprendizaje para el Cálculo Diferencial de una Variable" destaca por su enfoque interactivo. Cada capítulo incluye preguntas con espacios en blanco diseñadas para ser resueltas por los lectores. Estas preguntas no solo fomentan la participación activa, sino que también permiten a los estudiantes evaluar su comprensión y obtener retroalimentación inmediata. Este método de aprendizaje interactivo es particularmente eficaz, ya que involucra al estudiante en un diálogo continuo con el texto, facilitando una mayor retención y comprensión de los conceptos. La estructura del libro, con capítulos que comienzan con aprendizajes esperados y actividades de activación de saberes previos, está cuidadosamente diseñada para construir conocimientos de manera progresiva y coherente. Este enfoque pedagógico asegura que los estudiantes no solo adquieran nuevas habilidades, sino que también consoliden y expandan sus conocimientos previos. Las actividades de activación de saberes previos son especialmente valiosas, ya que ayudan a los estudiantes a identificar y reforzar conexiones entre conceptos nuevos y familiares, facilitando una comprensión más profunda y duradera.

Es importante destacar que este libro no solo está dirigido a estudiantes que inician su proceso de aprendizaje del cálculo diferencial, sino también a aquellos que buscan un recurso de referencia sólido y accesible. Los conceptos y técnicas presenta-dos en este texto son fundamentales para una amplia variedad de campos, incluyendo la física, la ingeniería, la economía y las ciencias sociales. Por lo tanto, tanto los estudiantes de matemáticas como los de otras disciplinas encontrarán en este libro una herramienta valiosa para su formación académica y profesional.

Cómo usar el texto

Este libro ha sido cuidadosamente diseñado para ser una herramienta de aprendizaje efectiva y accesible tanto para estudiantes como para docentes. A continuación, se ofrecen algunas recomendaciones sobre cómo aprovechar al máximo los recursos y actividades que se presentan a lo largo del texto.

Este texto se distingue por su enfoque centrado en el estudiante, su estructura pedagógica innovadora y su contenido riguroso. A lo largo de sus capítulos, este libro guía a los lectores desde los fundamentos de los números reales hasta las aplicaciones avanzadas de las derivadas, proporcionando una comprensión integral y profunda del cálculo diferencial. La inclusión de preguntas interactivas y actividades de activación de saberes previos garantiza un aprendizaje activo y significativo, haciendo de este texto una adición indispensable a la biblioteca de cualquier estudiante o profesional interesado en las matemáticas. Invito a todos los lectores a sumergirse en estas páginas con curiosidad y entusiasmo, y a experimentar el poder transformador del cálculo diferencial en su propio aprendizaje y desarrollo.

Si eres estudiante.

Realiza las actividades y responde las preguntas que se te presentan a lo largo del texto. Cada capítulo de este libro incluye actividades diseñadas específicamente para ayudarte a conectar nuevos conceptos con conocimientos previos y a consolidar tu comprensión a medida que avanzas. Es crucial que participes activamente en estas actividades, ya que te permitirán:

Alcanzar los aprendizajes esperados: Las actividades están alineadas con los objetivos de aprendizaje establecidos al inicio de cada capítulo. Al completarlas, te asegurarás de alcanzar estos objetivos de manera efectiva.

Tener una mejor comprensión de los temas: Las actividades no solo refuerzan los conceptos teóricos, sino que también te proporcionan una oportunidad para aplicar lo aprendido a problemas prácticos. Esto te ayudará a internalizar los conceptos y a desarrollar habilidades de resolución de problemas.

Completa las guías de trabajo al final de cada capítulo: Al final de cada capítulo, encontrarás guías de trabajo que incluyen una variedad de ejercicios y problemas. Estos están diseñados para:

Evaluar tu comprensión: Al trabajar en estos problemas, podrás evaluar cuánto has aprendido y en qué áreas podrías necesitar repasar o profundizar.

Consolidar tu conocimiento: Resolver problemas de manera regular es una de las mejores maneras de consolidar tu comprensión y retener la información a largo plazo.

Si eres docente.

Para obtener un mayor provecho del uso de este texto en el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial de una variable, te invitamos a generar espacios para que los estudiantes construyan sus aprendizajes. Como docente, es fundamental que facilites un entorno en el que los estudiantes puedan participar activamente en su aprendizaje. Para ello, considera lo siguiente:

Fomentar la participación en las actividades propuestas: Asegúrate de que los estudiantes comprendan la importancia de las actividades y las realicen con seriedad. Estas actividades están diseñadas para ser interactivas y estimular el pensamiento crítico y la aplicación práctica de los conceptos teóricos.

Evaluar y retroalimentar las guías de trabajo: Las guías de trabajo al final de cada capítulo son una herramienta valiosa para evaluar el progreso de los estudiantes. Proporciona retroalimentación detallada y constructiva para que los estudiantes comprendan sus errores y puedan mejorar. La retroalimentación es esencial para el proceso de aprendizaje, ya que permite a los estudiantes corregir sus errores y afianzar su comprensión. Proporcionar retroalimentación efectiva: La retroalimentación es un componente crucial en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Asegúrate de que tu retroalimentación sea:

Específica: En lugar de comentarios generales, proporciona observaciones específicas sobre lo que el estudiante hizo bien y en qué áreas necesita mejorar.

Constructiva: Enfócate en cómo el estudiante puede mejorar, ofreciendo sugerencias concretas y estrategias para abordar los problemas.

Oportuna: Proporciona retroalimentación lo antes posible para que los estudiantes puedan aplicarla mientras el material aún está fresco en sus mentes.

Si eres un apasionado por las matemáticas.

Si ya estás aquí y estas interesado por estudiar cálculo diferencial de una varia-ble, a lo largo del texto, descubrirás un enfoque interactivo y práctico que hará que el aprendizaje sea tanto accesible como estimulante, por lo tanto.

Involúcrate activamente: No te límites a leer los conceptos y ejemplos, participa en las actividades propuestas a lo largo de cada capítulo. Estas actividades están diseñadas para ayudarte a conectar nuevas ideas con tus conocimientos previos, facilitando una comprensión más profunda.

Completa las guías de trabajo: Al final de cada capítulo, encontrarás guías de trabajo con de ejercicios y problemas que te permitirán poner en práctica lo que has aprendido. Resolver estos problemas es fundamental para consolidar tu conocimiento y prepararte para aplicaciones más complejas.

Apóyate en los resultados de aprendizaje: Cada capítulo comienza con objetivos claros que te guiarán sobre lo que debes alcanzar, estos te ayudarán a enfocarte en los conceptos más importantes y a medir tu progreso.

Utiliza las oportunidades de autoevaluación: Las preguntas y espacios en blanco dentro del texto están diseñados para que te detengas y reflexiones sobre tu comprensión. Utiliza estas oportunidades para autoevaluarte y asegurarte de que estás captando los conceptos clave.

Recuerda que el aprendizaje del cálculo es un proceso continuo que requiere práctica y dedicación, así que puedes profundizar haciendo uso de tu creatividad o complementando con otros textos que te permitan formalizar algunos conceptos o desarrollar las demostraciones de algunos teoremas importantes que aquí hemos omitido.

1 Conocimientos previos

Activación de saberes previos (situación 1)

Resultado de aprendizaje:

Formula y ejecuta soluciones a situaciones cotidianas o no cotidianas que involucran fracciones y su representación.

Razonemos sobre la siguiente situación:

Por algunas circunstancias, la preparación de un jugo de naranja requiere, agua y naranja pura. Supongamos que se desea preparar un jugo de naranja con $\frac{1}{3}$ de naranja pura y el resto agua.

Teniendo en cuenta que la jarra tiene la forma que se muestra en la figura 1. ¿Cómo harías para llevar la jarra con $\frac{1}{3}$ de naranja pura?. Justifica.

Figura 1.1: Modelo de jarra

Si en una jarra exactamente igual a la dada en la figura 1 se prepara el jugo de naranja, pero ahora contiene $\frac{1}{4}$ de naranja pura y el resto agua.

Se desea vaciar las dos jarras (preparación 1 y preparación 2) en una sola jarra que contiene exactamente a las dos. Analizar, describir y fundamentar ¿Qué porcentaje de naranja pura contiene la nueva jarra?

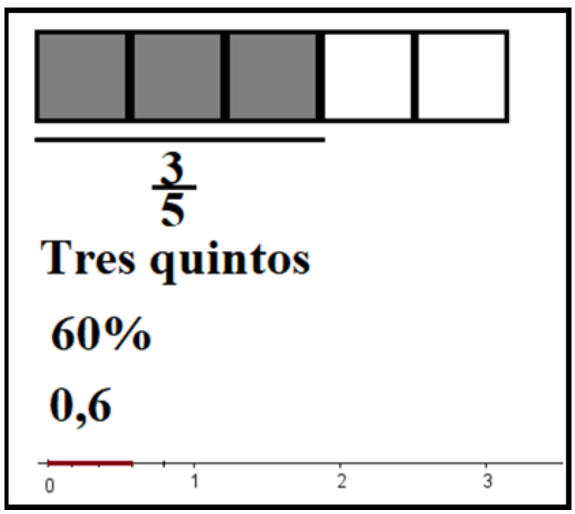
Formula y ejecuta un procedimiento diferente para resolver la pregunta anterior, ¿Qué diferencias encuentras en uno y otro procedimiento? ¿Cuál es el más viable y por qué?

1.1 Introducción a los números reales

La situación anterior es un claro ejemplo de que la comprensión del concepto de fracciones fundamental en la solución de situaciones cotidianas, sobre todo aquellas que involucran representar partes de un todo. Son muchas las situaciones cotidianas y no cotidianas que involucran explícitamente o implícitamente el uso de fracciones, desde dividir una pizza en porciones iguales, cálculo de porcentajes, comparación de magnitudes mediante el cociente, como es el caso de las razones, hasta definir la probabilidad de ocurrencia de un evento simple.

La figura 4.35 muestra distintos registros de una misma fracción, representación gráfica como parte de un todo, numérica como cociente entre dos enteros positivos $3/5$, verbal $3/5 =$ tres quintos, porcentaje como una parte de 100, $3/5 = 60\,\%$, decimal $3/5 = 0{,}6$ y en la recta numérica, todas ellas son representaciones equivalentes.

Figura 1.2: Tipos de registros de representación de la fracción 3/5



Investiga a cerca de las operaciones con fracciones y escribe algunos ejemplos

Figura 1.3: Rúbrica de evaluación del aprendizaje: Formula y ejecuta soluciones a situaciones cotidianas o no cotidianas que involucran fracciones y su representación

Criterio	Mínimo	Satisfactorio	Superior
Resolución de problemas	Comprende algunos aspectos de la situación por lo que logra encontrar una solución parcial o particular a problemas que involucran fracciones y su representación.	Comprende la situación, formula y ejecuta soluciones correctas para problemas comunes o casos particulares, aunque puede tener dificultades con situaciones no cotidianas que involucran fracciones y su representación.	Comprende y formula problemas con precisión en situaciones tanto cotidianas como no cotidianas. Encuentra y justifica soluciones óptimas y creativas para todo tipo de situaciones relacionadas con fracciones y su representación
Comprensión conceptual	Muestra una comprensión superficial del concepto de fracción, lo utiliza para justificar o argumentar ideas, pero de manera limitada.	Comprende y utiliza adecuadamente el concepto de fracciones en situaciones cotidianas o simples.	Demuestra una comprensión robusta y detallada del concepto de fracciones en todas sus representaciones y los utiliza correctamente en contextos variados y complejos.
Análisis y desarrollo de procedimientos	Desarrolla procedimientos básicos, o rutinarios en la solución de situaciones sencillas o cotidianas. Carece de un análisis detallado de los pasos a seguir.	Desarrolla procedimientos correctos y coherentes para situaciones comunes y cotidianas. Realiza un análisis adecuado del procedimiento utilizado para la solución de un problema o ejercicio.	Desarrolla procedimientos detallados y precisos para todo tipo de situaciones y realiza un análisis exhaustivo y lógico de los pasos a seguir y detecta errores en procedimientos realizados.
Uso del lenguaje matemático	Utiliza el lenguaje cotidiano para comunicar las ideas y justificar procedimientos y eventualmente usa términos y expresiones propias del lenguaje matemático.	Utiliza el lenguaje matemático de manera correcta y clara en la mayoría de las situaciones, usa terminología y expresiones adecuadas a la situación o al contexto	Utiliza el lenguaje matemático con precisión y claridad en todas las situaciones y comunica ideas complejas de manera efectiva haciendo uso apropiado del lenguaje matemático en cualquier contexto.

Fuente: Elaboración propia.

Situación 2

Aprendizaje esperado: Identifica y clasifica números reales de acuerdo con sus propiedades y usos en la solución de problemas en el contexto de las matemáticas cotidianas o de las otras ciencias.

Una ventana de forma cuadrada tiene una superficie de $2m^2$ y se desea polarizar para minimizar la intensidad de la luz que pasa por ella, si la lámina para polarizarla tiene dimensiones $2m \times 1m$. Analizar, describir y fundamentar ¿Cómo se debe cortar la lámina de forma que cubra toda la ventana y no se desperdicie el material?

¿Qué tipo de números reales intervienen en la situación y su relación?, justifique.

1.1.1 Un poco de conceptualización

Los números relaes representados por $\mathbb{R}$, abarcan números racionales e irracionales, los primeros definidos por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \Big/ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ \text{MCD}(a, b) = 1 \right\}$$

Todos los que se pueden expresar como división de enteros que no tienen divisores comunes, estos números y su representación son de gran utilidad en la representación y solución de situaciones reales o idealizadas, por ejemplo la situación 1 involucra el uso de fracciones que se representan haciendo uso de números racionales, geométricamente:

Figura 1.4: Recta numérica $\mathbb{Q}$

Entre un número racional y otro siempre es posible encontrar otro número racional distinto a los dos. ¿cuál?, justifique e ilustre

Describe otras situaciones que involucren números racionales

Por otra parte, aquellos números que no es posible escribir como cociente de enteros los llamamos irracionales, estos se encuentran presentes en diversas situaciones cotidianas y no cotidianas, por ejemplo las dimensiones de una ventana cuadrada cuya superficie es $2m^2$, como en la situación 2.

¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo de lados $2m$ y $1m$? ¿Qué tipo de número es?, justifica.

Explicar y fundamentar un procedimiento para representar números irracionales en la recta numérica.

¿Ese procedimiento funciona para representar e, π, ϕ?, justifica

1.1.2 Definición de valor absoluto

Definición 1.1

El **valor absoluto** o **magnitud** de un número real x se denota como $|x|$ y se define como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

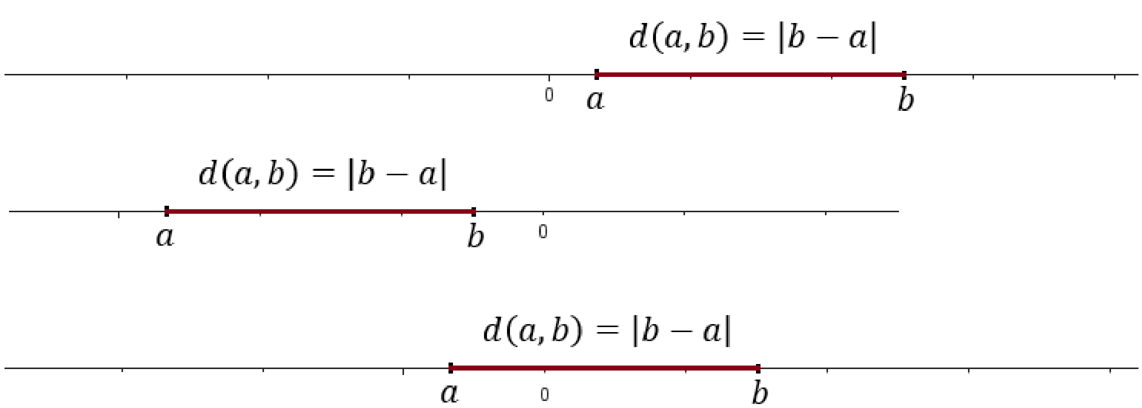
y representa al distancia del punto x en la recta numérica hasta el origen.

N La distancia entre dos números reales a y b se define por:

$$d(a,b) = |a-b| = |b-a|$$

gráficamente se puede ver en la figura 1.5

Figura 1.5: Representación de la distancia entre dos números reales a y b



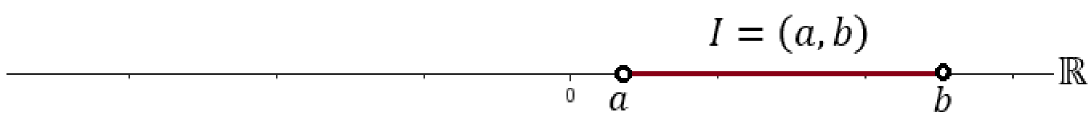
1.1.3 Intervalos en $\mathbb{R}$

En el conjunto de los números reales, en ocasiones es importante caracterizar algunos subconjuntos propios, por ejemplo, el conjunto de todos los números reales que se encuentran entre -1 y 1 es de gran utilidad ya que allí se encuentran los valores para los cuales la expresión $\sqrt{x^2-1}$, tiene sentido en $\mathbb{R}$. Este conjunto de números comprendidos entre -1 y 1 se denomina intervalo y su notación dependerá de los extremos, es decir, si hacen parte o no del conjunto

Intervalos abiertos

Se representa con la notación (a,b), donde a y b son los extremos del intervalo, y $a<b$. En este caso, ni a ni b pertenecen al intervalo y se escribe
$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}/a<x<b\}$.

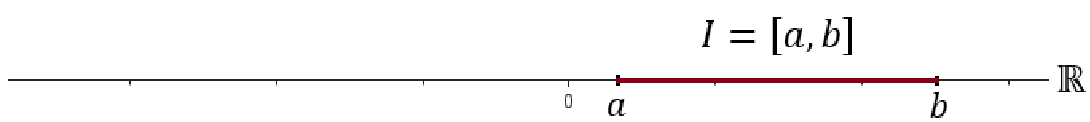
Figura 1.6: Ilustración de intervalos abiertos intervalos en $\mathbb{R}$



Intervalos cerrados

Se representa con la notación $[a,b]$, en este caso, ambos extremos, a y b, pertenecen al intervalo y se escribe $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}/a\leq x\leq b\}$.

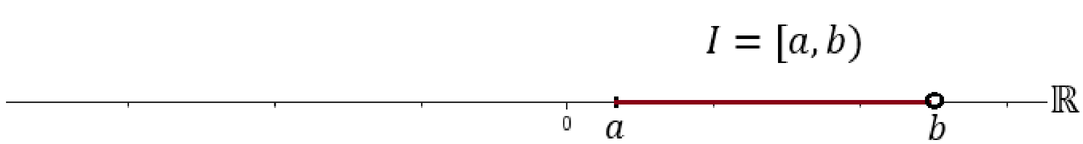
Figura 1.7: Ilustración de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$



Intervalo semiabierto por la derecha

Se representa con la notación $[a,b)$, donde a y b son los extremos del intervalo, y $a\leq b$. En este caso, el extremo izquierdo pertenece al intervalo, mientras que el extremo derecho no, se escribe $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}/a\leq x\leq b\}$.

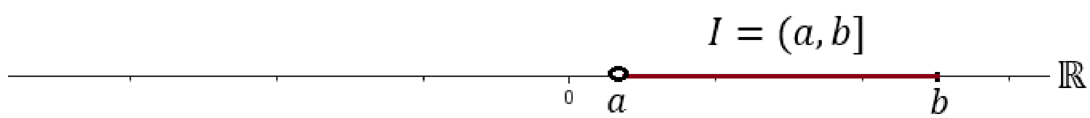
Figura 1.8: Ilustración de intervalo semiabierto por la derecha en $\mathbb{R}$



Intervalo semiabierto por la izquierda

Se representa con la notación $(a, b]$, donde a y b son los extremos del intervalo, y $a < b$. En este caso, el extremo izquierdo no pertenece al intervalo, mientras que el extremo derecho sí, se escribe $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\}$.

Figura 1.9: Ilustración de intervalo semiabierto por la izquierda en $\mathbb{R}$



Encuentra el intervalo en el que la expresión $\ln(x - 9)$ tiene sentido en los números reales.

Figura 1.10: Rúbrica de evaluación del aprendizaje: Formula y ejecuta soluciones a situaciones cotidianas o no cotidianas que involucran números reales y sus propiedades

Criterio	**Mínimo**	**Satisfactorio**	**Superior**
Resolución de problemas	Comprende algunos aspectos de la situación por lo que logra encontrar una solución parcial o particular a problemas que involucran números reales y sus propiedades.	Comprende la situación, formula y ejecuta soluciones correctas para problemas comunes o casos particulares, aunque puede tener dificultades con situaciones no cotidianas que involucran números reales y sus propiedades.	Comprende y formula problemas con precisión en situaciones tanto cotidianas como no cotidianas. Encuentra y justifica soluciones óptimas y creativas para todo tipo de situaciones relacionadas con números reales y sus propiedades
Comprensión conceptual	Muestra una comprensión superficial de los números reales y sus propiedades, los utiliza para justificar o argumentar ideas, pero de manera limitada.	Comprende y utiliza adecuadamente los números reales y sus propiedades en situaciones cotidianas o simples.	Demuestra una comprensión robusta y detallada de los números reales y sus propiedades y los utiliza correctamente en contextos variados y complejos.
Análisis y desarrollo de procedimientos	Desarrolla procedimientos básicos, o rutinarios en la solución de situaciones sencillas o cotidianas. Carece de un análisis detallado de los pasos a seguir.	Desarrolla procedimientos correctos y coherentes para situaciones comunes y cotidianas. Realiza un análisis adecuado del procedimiento utilizado para la solución de un problema o ejercicio.	Desarrolla procedimientos detallados y precisos para todo tipo de situaciones y realiza un análisis exhaustivo y lógico de los pasos a seguir y detecta errores en procedimientos realizados.
Uso del lenguaje matemático	Utiliza el lenguaje cotidiano para comunicar las ideas y justificar procedimientos y eventualmente usa términos y expresiones propias del lenguaje matemático.	Utiliza el lenguaje matemático de manera correcta y clara en la mayoría de las situaciones, usa terminología y expresiones adecuadas a la situación o al contexto	Utiliza el lenguaje matemático con precisión y claridad en todas las situaciones y comunica ideas complejas de manera efectiva haciendo uso apropiado del lenguaje matemático en cualquier contexto.

Fuente: Elaboración propia.

1.2 Introducción a la geometría analítica

Resultado de aprendizaje

Resuelve problemas matemáticos, cotidianos o situaciones que son susceptibles de representar haciendo uso de conceptos o propiedades de los lugares geométricos y sus representaciones.

Activación de saberes previos

¿Conoces el juego batalla naval?, si tu respuesta es no! investiga un poco sobre él, es muy simple

Piensa en una versión digital del juego, con un tablero de 100×100, cada contrincante tiene 10 embarcaciones.

Cuatro submarinos; dimensiones 1×1

Tres destructores; dimensiones 2×1

Dos cruceros; dimensiones 3×1

Un acorazado; dimensiones 4×1

¿Cómo representarías tu tablero para facilitar la ubicación de las embarcaciones?, justifica. **Realiza una representación del tablero.**

¿Cómo ubicarías las embarcaciones para que el contrincante tenga menos oportunidad de destruirlos?, argumenta tu respuesta.

¿Cómo defenderías la posición de una embarcación en el tablero, de modo que sea comprensible?, muestra un ejemplo.

¿Cuál sería tu estrategia para ganar el juego?, justifica.

La Geometría Analítica, una rama importante de las matemáticas, se enfoca en el estudio de figuras y transformaciones geométricas representadas por ecuaciones algebraicas. Sus inicios se remontan al siglo XVII, cuando Descartes y Fermat abrieron las puertas a este campo, principalmente abordando problemas en el plano. Sin embargo, fue Newton quien en 1704 realizó un avance significativo al clasificar las curvas de tercer orden según su número de puntos de intersección con una recta, identificando un total de 72 tipos de curvas representables mediante ecuaciones de cuatro tipos.

A lo largo del tiempo, diversos matemáticos como Stirling, Maclaurin, Euler y otros contribuyeron al desarrollo y formalización de la geometría analítica. Euler, en 1748, sistematizó esta rama matemática de manera formal, introduciendo sistemas de coordenadas rectangulares, oblicuas y polares, así como estudiando las transformaciones entre estos sistemas y las propiedades generales de las curvas. Su trabajo incluyó la clasificación de curvas según el grado de sus ecuaciones, el estudio de secciones cónicas, formas canónicas de ecuaciones de segundo grado, tangentes, curvaturas, y otras propiedades geométricas fundamentales.

A lo largo de la segunda mitad del siglo, se introdujeron mejoras parciales en la geometría analítica, consolidando su importancia en campos como la ingeniería y otras ciencias. Hoy en día, la comprensión y dominio de la geometría analítica son esenciales para abordar una amplia gama de conceptos específicos del conocimiento y para la resolución de problemas en diversas disciplinas.

La geometría analítica es una rama de la geometría en la que las líneas rectas, las curvas y las figuras geométricas se representan mediante expresiones algebraicas y numéricas usando un conjunto de ejes y coordenadas. Cualquier punto del plano se puede localizar con respecto a un par de ejes perpendiculares dando las distancias del punto a cada uno de los ejes.

1.2.1 El plano cartesiano

Así como los números reales se pueden representar geométricamente por puntos de la recta real, podemos representar pares ordenados de números reales, es decir, puntos en un plano. El modelo que se desarrolla para representar pares ordenados de números reales se llama sistema de coordenadas rectangulares o plano cartesiano.

Definición 1.2

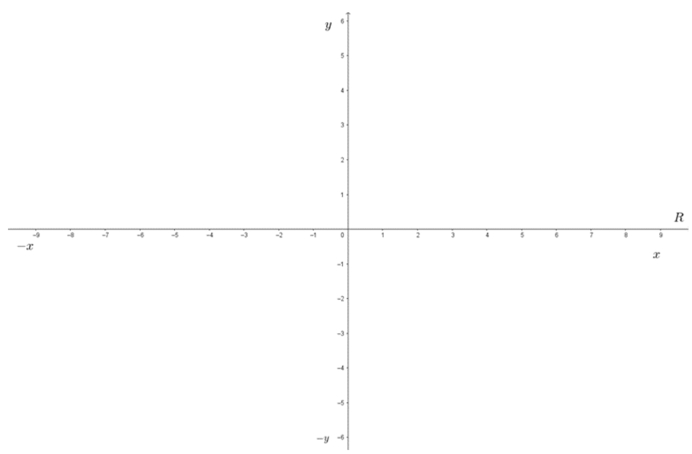
Recuerde que si A y B son conjuntos no vacíos se define el producto cartesiano $A \times B$ como:

$$A \times B = \left\{ (a,b) \big/ \, a \in A \, y \, b \in B \right\}$$

Si hacemos $A = B = \mathbb{R}$ donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales, entonces, $A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \left\{ (x,y) \big/ \, x \in \mathbb{R} \, , \, y \in \mathbb{R} \right\}$ que llamamos plano cartesiano.

La representación geométrica de este conjunto se ilustra en la figura 1.11

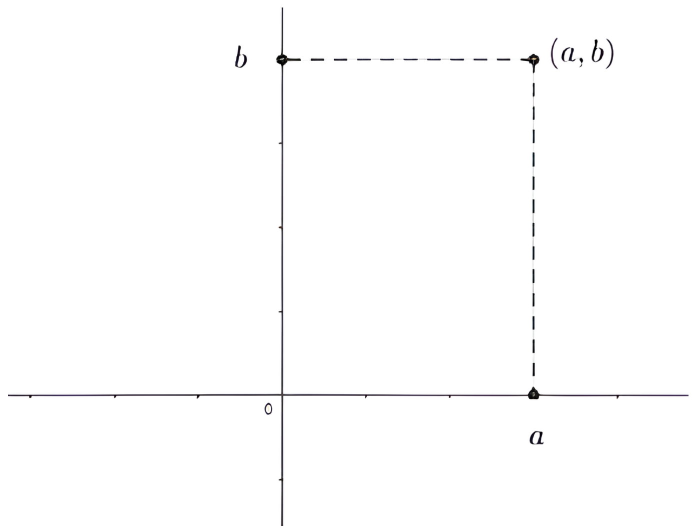
Figura 1.11: Plano cartesiano



La recta horizontal se llama tradicionalmente eje x, y la recta vertical eje y. Su punto de intersección se denomina origen dividiendo el plano en cuatro partes llamadas cuadrantes. Cada punto del plano lo identificamos por un par ordenado (x, y) de números reales x e y, llamados coordenadas del punto. El número x significa la distancia dirigida desde el eje y hasta el punto y de forma similar el número y. En el punto (x, y) la primera coordenada se denomina x o abscisa y la segunda coordenada y u ordenada.

N Un punto en el plano cartesiano se representa por la pareja $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y se ubica en la intersección de la recta vertical que pasa por a en x y la recta horizontal que pasa por b en y

Figura 1.12: Ilustración del punto (a, b) en el plano

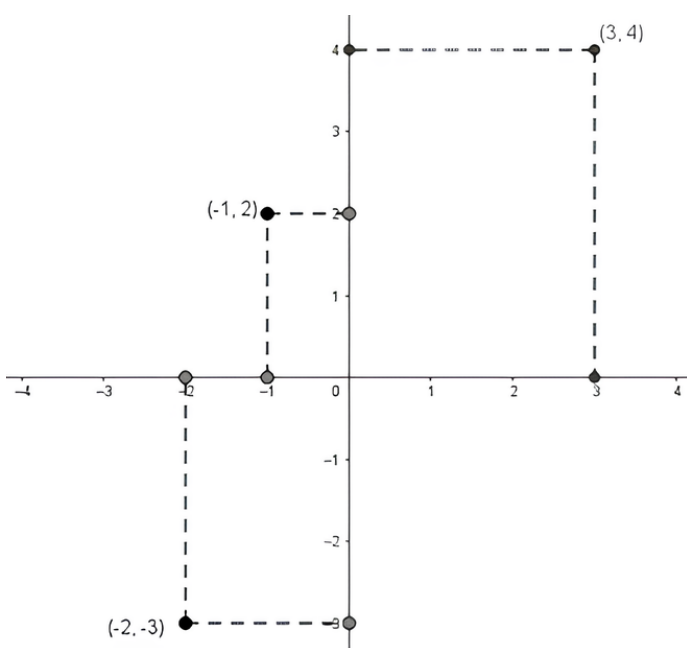


Ejemplo 1.1

Situar los puntos $(-1, 2)$; $(3, 4)$, $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(-2, -3)$, en el plano cartesiano.

Solución

Figura 1.13: Solución ejemplo 1.1

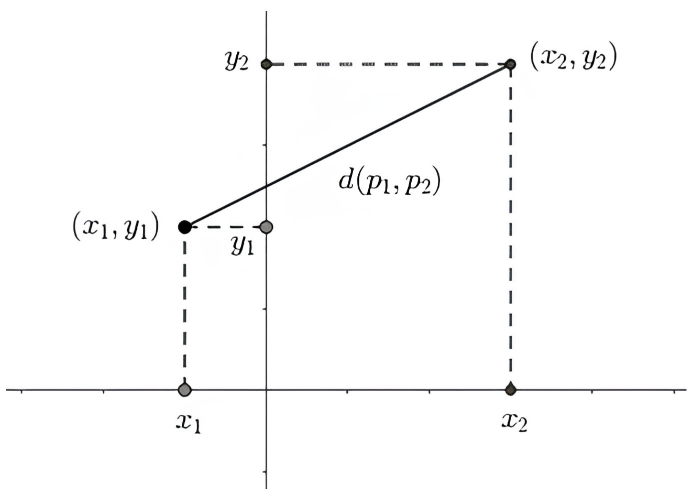


1.2.2 Distancia entre dos puntos

Definición 1.3
Hemos visto que la distancia entre dos puntos x_1, x_2 en la recta real, viene dada por $d(x_1, x_2) = |x_2 - x_1|$, en esta sección estamos interesados en calcular la distancia entre dos puntos $p_1 = (x_1, y_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2)$ en el plano. Recuerde que según el teorema de Pitágoras, para un triángulo rectángulo con hipotenusa c y lados a y b, tenemos la relación $c^2 = a^2 + b^2$, recíprocamente, si $c^2 = a^2 + b^2$ entonces el triángulo es rectángulo.

Teniendo en cuenta esa importante propiedad de los triángulos rectángulos construiremos una fórmula para calcular la distancia d entre dos puntos $p_1 = (x_1, y_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2)$ en el plano como se indica en la figura 1.14

Figura 1.14: Representación gráfica de la distancia entre dos puntos.



En la figura 1.14 se observa que la longitud del lado vertical viene dada por $|y_2 - y_1|$ es decir, la distancia entre y_1 y y_2; de igual forma la longitud del lado horizontal viene dada por $|x_2 - x_1|$.

Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$d^2(p_1, p_2) = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

Al extraer la raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad se obtiene:

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

O lo que es lo mismo

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 1.2

Describir y fundamentar, qué valor o valores puede tomar x de modo que la distancia de $p_1 = (x, 3)$ al punto $p_2 = (1, 5)$ sea 4 unidades.

Solución

Debemos encontrar valores para x de modo que $d(p_1, p_2) = 4$ es decir:

$$\sqrt{(1-x)^2 + (5-3)^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 2^2} = 4$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad se obtiene

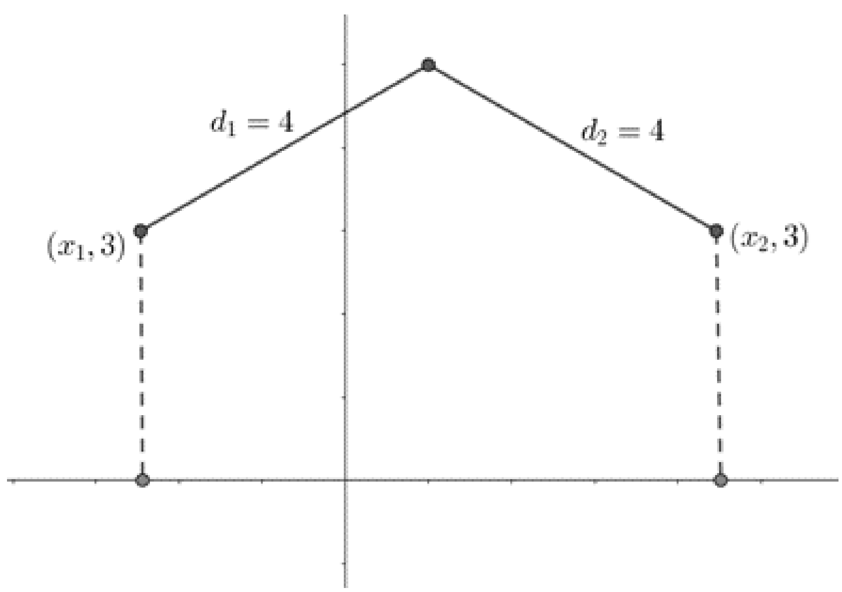
$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(x-1)^2+4}\right)^2 &= 4^2 \\ (x-1)^2 + 4 &= 16 \\ (x-1)^2 &= 12 \end{aligned}$$

Al extraer raíz cuadrada a ambos miembros se obtiene:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2} &= \sqrt{12} \\ (x-1) &= \pm 2\sqrt{3} \\ x &= 1 \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Se tienen dos posibles valores para x, $x_1 = 1 - 2\sqrt{3}$ y $x_2 = 1 + 2\sqrt{3}$, la figura 1.15 ilustra la situación

Figura 1.15: Ilustración solución ejemplo 1.2



Ahora verificamos que $x_1 = 1 - 2\sqrt{3}$ y $x_2 = 1 + 2\sqrt{3}$ cumplan la condición, sea $p_1 = (x_1, 3)$ y $p_2 = (1, 5)$ debemos verificar que $d(p_1, p_2) = 4$, en efecto

$$\begin{aligned}
d(p_1, p_2) &= \sqrt{(1 - x_1)^2 + (5 - 3)^2} \\
&= \sqrt{(1 - (1 - 2\sqrt{3}))^2 + 4} \\
&= \sqrt{(1 - 1 + 2\sqrt{3})^2 + 4} \\
&= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 4} \\
&= \sqrt{(4)(3) + 4} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4
\end{aligned}$$

Es decir $d(p_1, p_2) = 4$

Ahora verifica que si $p_1 = (x_2, 3)$ y $p_2 = (1, 5)$ entonces $d(p_1, p_2) = 4$

Ejemplo 1.3

Describir y fundamentar la relación que debe existir entre x e y para que la distancia de $p_1 = (x, y)$ a $p_2 = (2, 3)$ sea 5 unidades.

Solución
Debemos encontrar los valores de x e y que satisfacen

$$\begin{aligned} d(p_1, p_2) &= 5 \\ \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} &= 5 \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}\right)^2 &= 5^2 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 &= 25 \\ (y-3)^2 &= 25 - (x-2)^2 \end{aligned}$$

Al extraer raíz cuadrada se obtiene

$$\begin{aligned} \sqrt{(y-3)^2} &= \pm\sqrt{25 - (x-2)^2} \\ y - 3 &= \pm\sqrt{25 - (x-2)^2} \\ y &= 3 \pm \sqrt{25 - (x-2)^2} \end{aligned}$$

Note que $(x-2)^2 \leq 25$ de donde:

$$\begin{aligned} -5 \leq & x - 2 \leq 5 \\ -3 \leq & x \leq 7 \end{aligned}$$

Análogamente

$$-2 \leq y \leq 8$$

Por ejemplo; si $x = -3$ entonces $y = 3 \pm \sqrt{25 - (-3-2)^2} = 3 \pm \sqrt{25 - 25} = 3$ por tanto el punto $p_1 = (-3, 3)$, cumple que si $p_2 = (2, 3)$ entonces $d(p_1, p_2) = 5$, en efecto.

$$\begin{aligned} d(p_1, p_2) &= \sqrt{(2 - (-3))^2 + (3-3)^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{5^2} = 5 \end{aligned}$$

Busca otros puntos que satisfagan la condición y representalas gráficamente en el plano

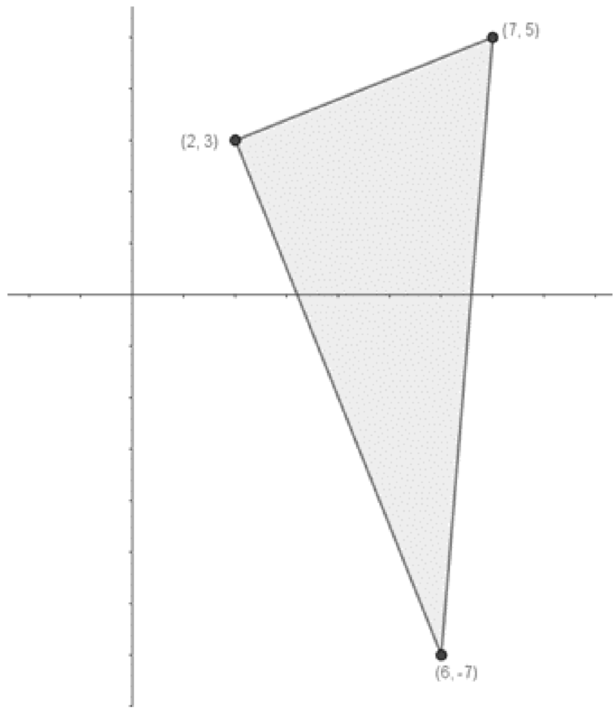
Ejemplo 1.4

Demostrar que los puntos $p_1 = (7,5)$, $p_2 = (2,3)$, $p_3 = (6,-7)$ son los vértices de un triángulo rectángulo que tienen 29 unidades cuadradas de superficie.

Solución

Ubicamos los puntos $p_1 = (7,5)$, $p_2 = (2,3)$, $p_3 = (6,-7)$ en el plano cartesiano (ver figura 1.16)

Figura 1.16: Representación en el plano de los puntos $p_1 = (7,5)$, $p_2 = (2,3)$, $p_3 = (6,-7)$



Una solución al problema sería, probar que en la figura 1.16 se cumple el teorema de Pitágoras, por qué?, verificalo. $d(p_1,p_2)^2 + d(p_2,p_3)^2 = d(p_1,p_3)^2$

Muestra otra forma de resolverlo, justifica tu respuesta

Ejemplo 1.5

Hallar x tal que la distancia $(2,-1)$ al punto $(x,2)$ sea 5.

Solución

Si razonamos de la misma manera que en los ejercicios anteriores obtenemos que

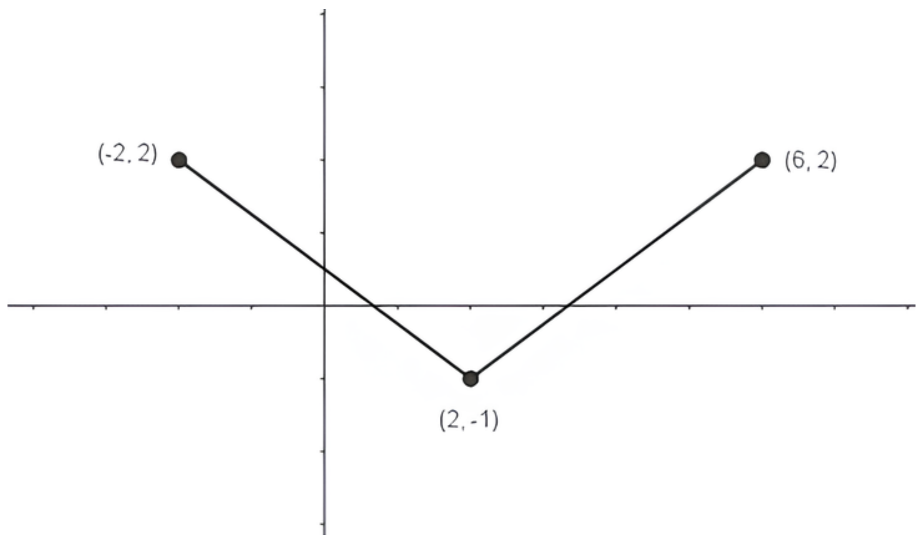
$$
\begin{aligned}
5 = \sqrt{(x-2)^2+(2+1)^2} &\Rightarrow 5 = \sqrt{(x-2)^2+9} \\
&\Rightarrow (5)^2 = \left(\sqrt{(x-2)^2+9}\right)^2 \\
&\Rightarrow 25 = (x-2)^2+9 \\
&\Rightarrow 25-9 = (x-2)^2 \\
&\Rightarrow \sqrt{16} = \sqrt{(x-2)^2} \\
&\Rightarrow \pm 4 = x-2 \\
&\Rightarrow 2 \pm 4 = x
\end{aligned}
$$

Luego

$$x_1 = 4 + 2 = 6 \Rightarrow x_1 = 6$$
$$x_2 = -4 + 2 = -2 \Rightarrow x_2 = -2$$

Podemos apreciar el ejemplo anterior graficado en este plano en donde podemos apreciar claramente los valores de x_1 e x_2.

Figura 1.17: Ilustración solución ejemplo 1.6



Verifica que $d_1 = d_2 = 5$ en la figura 1.17

1.2.3 Punto medio

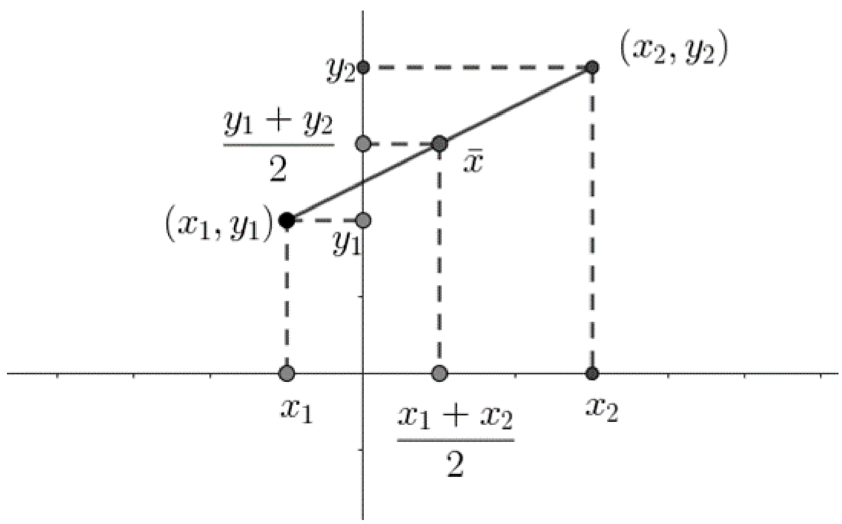
Definición 1.4

Dados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) puntos en el plano, se definen las coordenadas del punto medio del segmento que los une como

$$\overline{x} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \tag{1.1}$$

Este concepto lo podemos apreciar claramente en el siguiente gráfico.

Figura 1.18: Representación gráfica del punto medio de un segmento



Verifica que $\overline{x}$ representa el punto medio del segmento que une a los puntos $p_1 = (x_1, y_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2)$, comparte tu procedimiento

Ejemplo 1.6

Hallar las coordenadas del punto medio del segmento que une a los puntos $p_1 = (-3, 4)$, $p_2 = (5, 6)$.

Solución

Sean $p_1 = (-3, 4)$ y $p_2 = (5, 6)$, por definición el punto medio del segmento $\overline{p_1p_2}$ tienen coordenadas

$$\overline{x} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

donde $x_1 = -3$, $x_2 = 5$, $y_1 = 4$, $y_2 = 6$, por tanto

$$\overline{x} = \left(\frac{-3 + 5}{2}, \frac{4 + 6}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{10}{2}\right) = (1, 5)$$

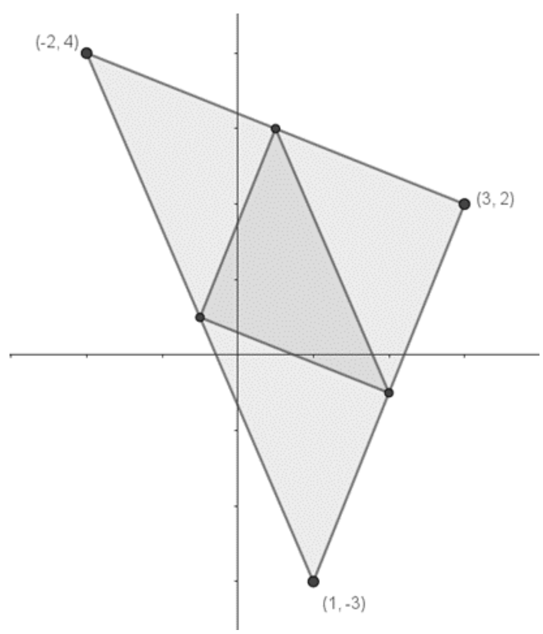
Ejemplo 1.7

Describir y fundamentar la relación que existe entre el área del triángulo y el área del triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los segmentos $\overline{p_1p_2}$, $\overline{p_1p_3}$ y $\overline{p_2p_3}$

Solución

Al representar los puntos en el plano cartesiano se obtiene

Figura 1.19: Solución ejemplo 1.7



Si se prueba que $d(p_1, p_2) = d(p_2, p_3)$ entonces el triángulo $\Delta p_1 p_2 p_3$ es un triángulo isósceles.

Verifica y comparte tu procedimiento

Sean $\overline{x_1}$ las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{p_1 p_2}$, $\overline{x_2}$ del segmento $\overline{p_2 p_3}$ y $\overline{x_3}$ las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{p_1 p_3}$ entonces

$$\overline{x_1} = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{-3+2}{2}\right) \qquad \overline{x_2} = \left(\frac{3-2}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \qquad \overline{x_3} = \left(\frac{1-2}{2}, \frac{-3+4}{2}\right)$$
$$\overline{x_1} = (2, -1/2) \qquad \overline{x_2} = (1/2, 3) \qquad \overline{x_3} = (-1/2, 1/2)$$

Las longitudes de los lados del triángulo inscrito son:

$$\begin{aligned} d_4 &= \sqrt{(2-1/2)^2 + (-1/2-3)^2} \\ &= \sqrt{9/4 + 49/4} \\ &= \sqrt{29/2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d_4 &= \sqrt{(1/2+1/2)^2 + (3-1/2)^2} \\ &= \sqrt{1 + 25/4} \\ &= \sqrt{29/4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_4 &= \sqrt{(2+1/2)^2 + (-1/2-1/2)^2} \\ &= \sqrt{25/4 + 1} \\ &= \sqrt{29/4} \end{aligned}$$

Ahora, para hallar el área del triángulo inscrito hacemos

$$A_i = \frac{B_i h_i}{2}$$

Donde $B_i = \sqrt{\dfrac{29}{2}}$, para calcular h_i usamos teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}
\left(\frac{B_i}{2}\right)^2 + h_i^2 &= \left(\sqrt{\frac{29}{4}}\right)^2 \\
h_i^2 &= \left(\sqrt{\frac{29}{4}}\right)^2 - \left(\frac{B_i}{2}\right)^2 \\
h_i^2 &= \frac{29}{4} - \frac{29}{8} \\
h_i^2 &= \frac{29}{8}
\end{aligned}$$

Luego $h_i = \sqrt{\dfrac{29}{8}}$

Por tanto $A_i = \dfrac{\sqrt{\frac{29}{2}}\sqrt{\frac{29}{8}}}{2} = \dfrac{29}{8}$

Ahora es fácil probar que el área del triángulo mayor es 4 veces el área del triángulo inscrito, verifica y comparte tu solución

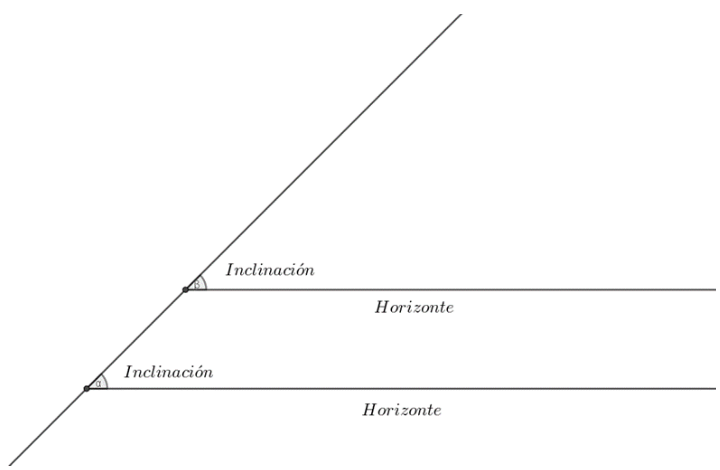
1.2.4 La línea recta

La línea recta, desde su definición axiomática dada por Euclides hasta su representación analítica dada por Descartes, ha sido un concepto fundamental para el desarrollo de la geometría.

Euclides en sus elementos se refiere a la línea como un término no definido; sin embargo, se refiere a ella como longitud sin anchura y línea recta, aquella que yace por igual sobre todos sus puntos. Esta puede decirse que es una definición basada en la intuicion, pero que proporciona elementos fundamentales para entender el concepto y su representación gráfica.

En ese sentido, si se piensa en el horizonte como la línea horizontal representada en el plano cartesiano por el eje x, la idea **yace por igual sobre todos sus puntos** hace referencia a su inclinación respecto al horizonte.

Figura 1.20: Ilustración idea intuitiva de línea recta



1.2.5 Ecuación de la recta

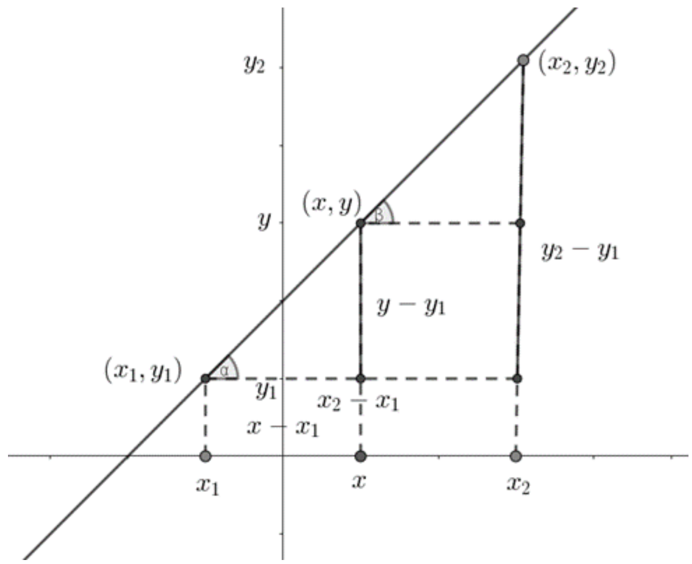
La expresión algebraica que describe el lugar geométrico de todos los puntos en el plano que se extienden indefinidamente en sentidos opuestos con una misma inclinación sobre la horizontal le llamamos ecuación de recta.

Veremos aquí que dicha expresión viene dada por

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son puntos sobre la recta.

Figura 1.21: Recta que pasa por (x_1, y_1), (x_2, y_2)



En la figura 1.29 se puede apreciar que la inclinación de la recta respecto al eje x se mantiene constante, es decir θ no cambia por ende la relación

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1.2}$$

Se mantiene constante, la cual llamamos pendiente de la recta, por tal razón, dado cualquier punto (x, y) sobre la recta se cumple que: (ver figura 1.29)

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \tag{1.3}$$

igualando (1.2) y (1.3) tenemos

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

luego

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{1.4}$$

Lo que representa la ecuación de la recta en el plano que pasa por los puntos $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$

Si en (1.4) hacemos $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$ entonces

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

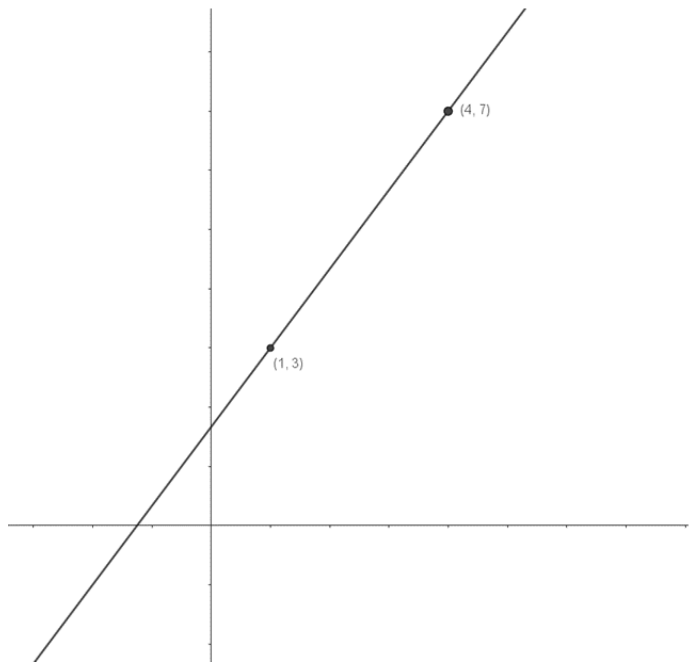
Conocida como ecuación de la recta dado un punto por donde pasa y su pendiente

Ejemplo 1.8

Representar en el plano la recta que pasa por los puntos $p_1 = (1, 3)$ y $p_2 = (4, 7)$. Analizar y fundamentar si el punto $\left(2, \dfrac{17}{3}\right)$ está sobre la recta.

Solución
Dibujamos en el plano la recta que pasa por p_1 y p_2

Figura 1.22: Recta que pasa por $(1, 3)$, $(4, 7)$



Por definición $y = y_1 + m(x - x_1)$
Pero $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{7-3}{4-1} = \dfrac{4}{3}$
Reemplazando se obtiene

$$y = 3 + \frac{4}{3}(x-1)$$
$$y = 3 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$$
$$y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

Es la ecuación que representa a la recta que pasa por $p_1 = (1, 3)$ y $p_2 = (4, 7)$.

Para saber si el punto $\left(2, \dfrac{17}{3}\right)$ está sobre la recta debe ocurrir que si $x = 2$ entonces $y = \dfrac{17}{3}$ en la ecuación.

Veamos para $x = 2$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{4}{3}(2) + \frac{5}{3} \\
&= \frac{8}{3} + \frac{5}{3} = \frac{13}{3} \neq \frac{17}{3}
\end{aligned}
$$

Por lo que el punto $\left(2, \dfrac{17}{3}\right)$ no pertenece a la recta que pasa por: $p_1 = (1, 3)$ y $p_2 = (4, 7)$.

1.2.6 Perpendicularidad y paralelismo

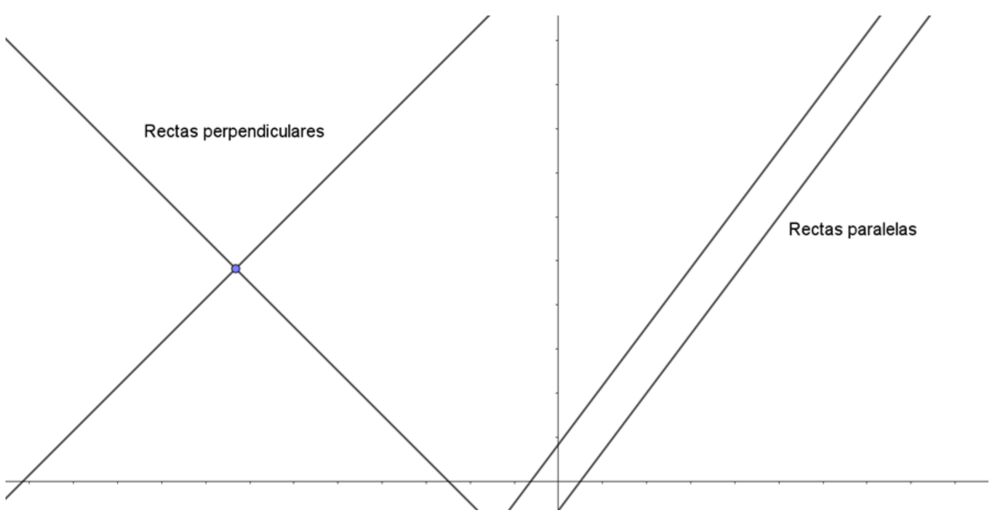
Definición 1.5

Dos rectas L_1 y L_2 en el plano se dice que son perpendiculares si se cortan formando un ángulo recto.
Se escribe $L_1 \perp L_2$ para denotar que L_1 y L_2 son perpendiculares.
Dos rectas L_1 y L_2 en el plano se dice que son paralelas si nunca se cortan, escribiremos $L_1 \parallel L_2$ para denotar que L_1 y L_2 son paralelas.

N Sean L_1 y L_2 rectas de pendientes m_1 y m_2 respectivamente entonces:

1. Si $L_1 \perp L_2$ entonces $m_1 \cdot m_2 = -1$
2. Si $L_1 \parallel L_2$ entonces $m_1 = m_2$

Figura 1.23: Rectas perpendiculares y paralelas



Ejemplo 1.9

Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,3)$ y es perpendicular a la recta dada por la ecuación $3x-2y+5=0$

Solución

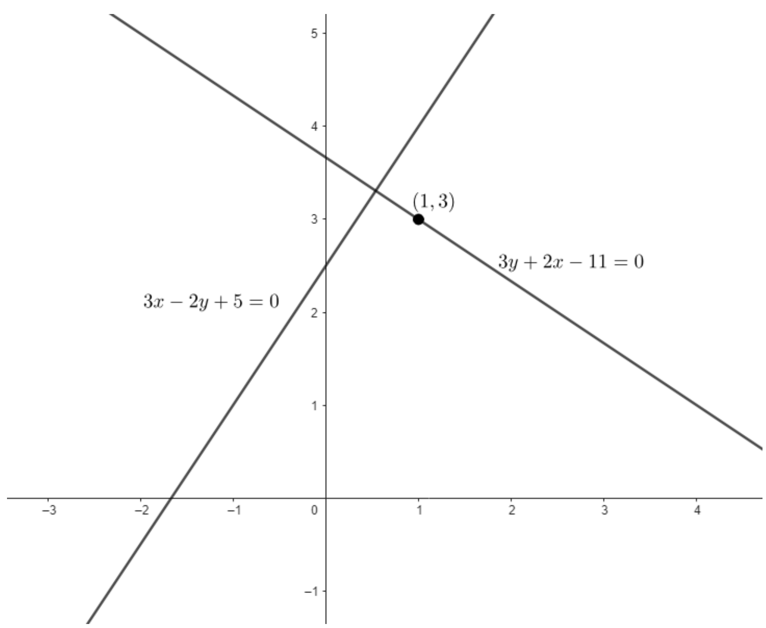
De lo aprendido anteriormente podemos decir que para determinar la ecuación de la recta necesitamos un punto y su pendiente. Tenemos un punto que es $(1,3)$, falta la pendiente, la cual, podemos hallar usando el hecho de que las rectas son perpendiculares.

Sea m la ecuación de la recta pedida y m_1 la pendiente de la recta
$3x-2y+5=0$
deducimos que $m_1=\dfrac{-a}{b}=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}$
dado que $a=3; b=-3$
ahora $(m)(m_1)=-1 \Rightarrow m=\dfrac{-1}{m_1} \Rightarrow m=\dfrac{-2}{3}$
si usamos la fórmula $y=y_1+m(x-x_1)$ tenemos que

$$y=3-\frac{2}{3}(x-1)$$
$$y=3-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$$
$$3y=9-2x+2$$

Con lo que la ecuación de la recta pedida es: $3y+2x-11=0$

Figura 1.24: Ilustración recta perpendicular que pasa por $(1,3)$

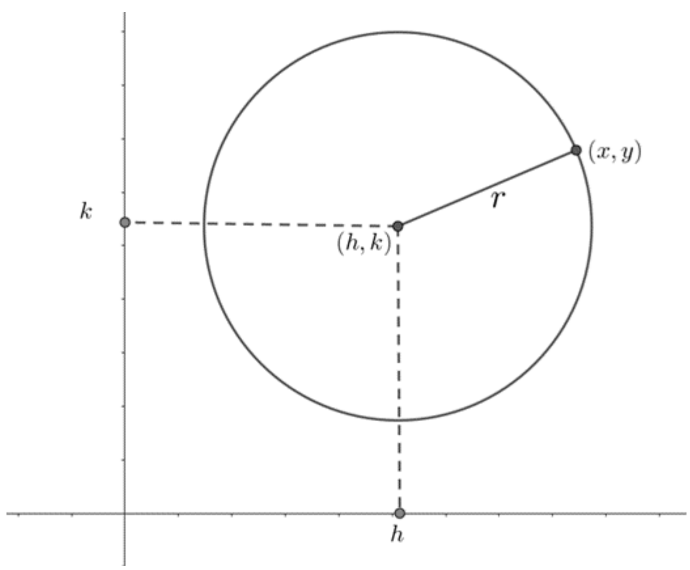


1.2.7 Circunferencias

Definición 1.6
Se denomina circunferencia al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. El radio de la circunferencia es la distancia de un punto cualquiera de dicha circunferencia al centro. Para determinar la ecuación analítica de la circunferencia hacemos coincidir el centro con el origen de coordenadas. Las coordenadas de cualquier punto de la circunferencia (x, y) determinan un triángulo rectángulo, y por supuesto este responde al teorema de Pitágoras y nos queda $r^2 = x^2 + y^2$, que es la ecuación de la circunferencia con centro en el origen.

Para determinar la ecuación de la circunferencia con centro (h, k) y radio r, representamos (h, k) en el plano, luego para cualquier punto (x, y) sobre la circunferencia, se debe cumplir que $d((h, k), (x, y)) = r$

Figura 1.25: Representación gráfica de la circunferencia de radio r y centro (h, k)



$d((h, k)^2, (y - k)^2) = r$ implica que

$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$

Elevando al cuadrado se obtiene que:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Ecuación canónica de la circunferencia con centro (h, k) y radio r

Ejemplo 1.10

Dibujar la circunferencia $3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$

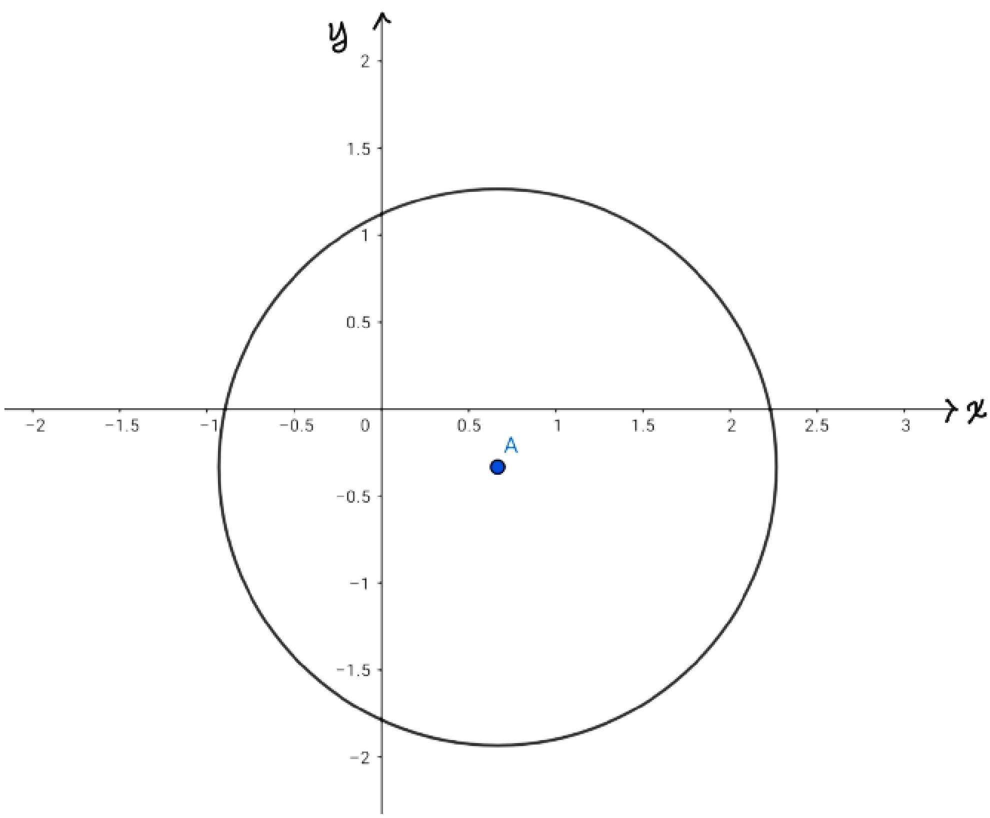
Solución

Tenemos que la ecuación de la circunferencia es $3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$, ahora debemos agrupar términos semejantes y completar cuadrados,

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4x + 3y^2 + 2y = 6 &\Rightarrow x^2 - \frac{4}{3}x + y^2 + \frac{2}{3}y = 2 \\ &\Rightarrow x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} + y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} = 2 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} \\ &\Rightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{21}{9} \end{aligned}$$

Luego el centro de la circunferencia es $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ y el radio es $r = \frac{\sqrt{21}}{3}$

Figura 1.26: Representación gráfica de la circunferencia $3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$



Ejemplo **1.11**

Determinar la ecuación de la circunferencia circunscrita en el triángulo formado por las rectas dadas por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=14 \\ 3x+y=22 \end{cases}$$

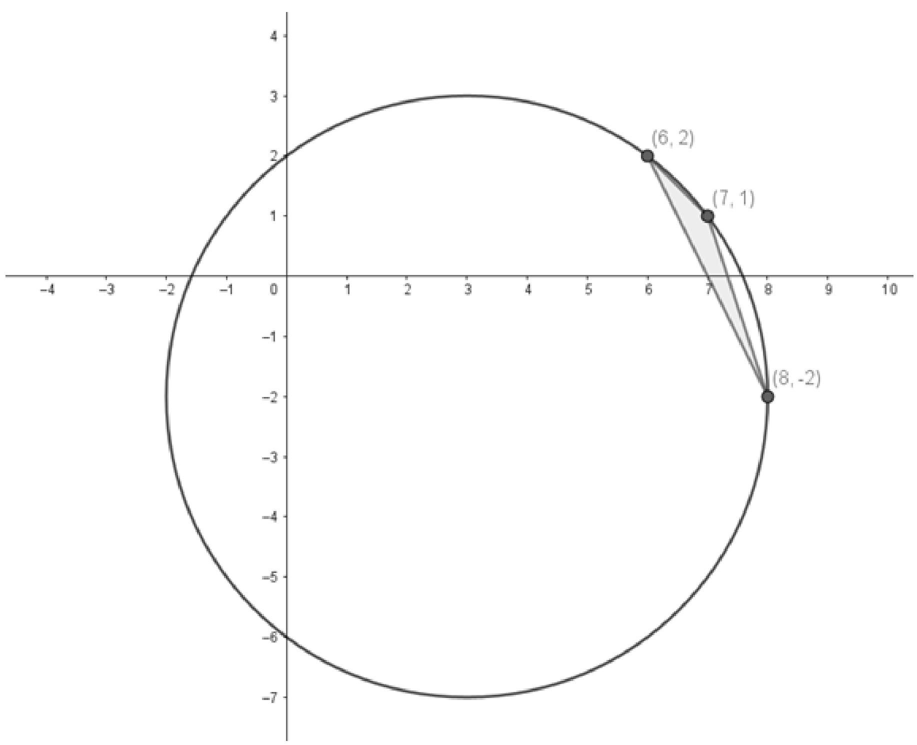
Solución

Hallamos los vértices del triángulo, que son la intercesión de las rectas 2 a 2, como se puede observar en la figura a la derecha del documento.

Ahora, resolviendo usando cualquiera de los métodos para resolver ecuaciones lineales de 2 por 2, obtenemos que los puntos de intersección son $(6,2),(7,1)$ y $(8,-2)$ los cuales son puntos de la circunferencia.

Ilustramos la situación, representando los puntos en el plano cartesiano.

Figura 1.27: Circunferencia que pasa por los puntos $(6,2),(7,1)$ y $(8,-2)$



Estos puntos satisfacen la ecuación general de la circunferencia dada por:
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
y al reemplazar cada punto en la ecuación se obtiene el sistema:

$$\begin{array}{l} 6A + 2B + C = -40 \\ 7A + B + C = -50 \\ 8A + 2B + C = -68 \end{array}$$

Muestra el proceso de solución del sistema.

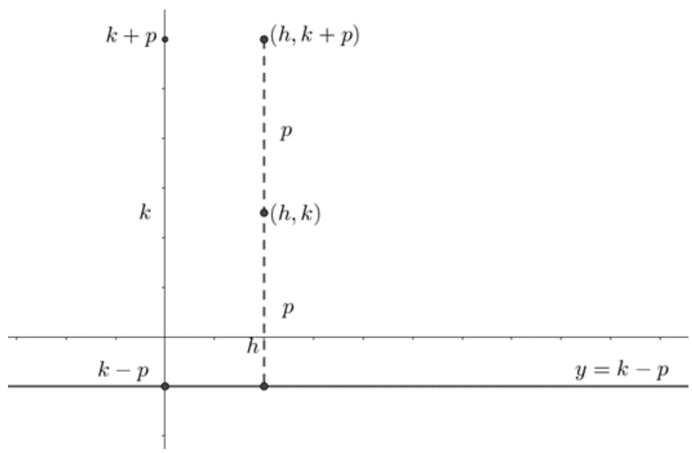
Ahora resolviendo el sistema se obtiene, $A = -6, B = 4$ y $C = -12$ con lo que la ecuación general de la circunferencia es: $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$

1.2.8 Parábolas

Lugar geométrico de todos los puntos en el plano cuya distancia a un punto fijo llamado foco es la misma que a una distancia fija llamada directriz.

Sin pérdida de generalidad consideremos un punto cualquiera en el plano xy que represente el foco de la parábola y una recta fija que represente la directriz. ver figura 1.28

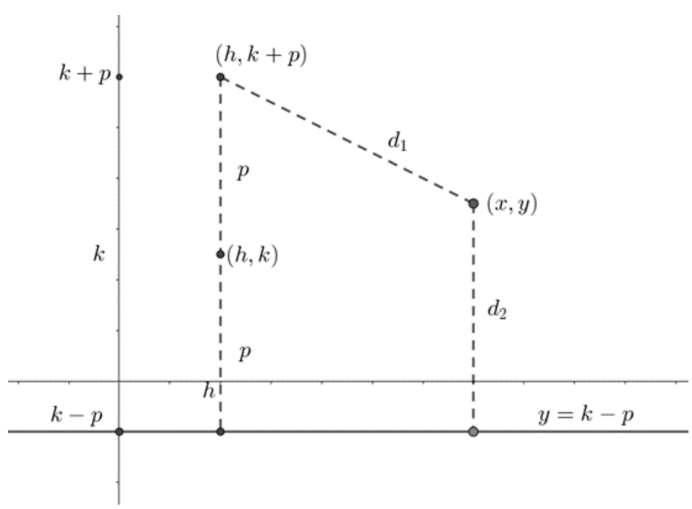
Figura 1.28: Representación gráfica del foco y la directriz de una parábola



Consideremos el punto (h, k) que se encuentra en el punto medio del segmento que va del foco a la directriz y es perpendicular a esta, llamaremos p la distancia de (h, k) al foco.

Ahora consideremos un punto $p = (x, y)$ cualquiera en el plano que cumpla la condición $d(p, f) = d(p, D)$

Figura 1.29: Ilustración punto (x, y) sobre la parábola de foco $(h, k+p) = F$ y directriz $y = k - p$



Vemos que

$$\begin{aligned} d(p,F) &= d(p,D) \\ \sqrt{(x-h)^2+(y-(k+p))^2} &= \sqrt{(x-x)^2+(y-(k-p))^2} \\ \sqrt{(x-h)^2+((y-k)-p)^2} &= \sqrt{0^2+((y-k)+p)^2} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros queda

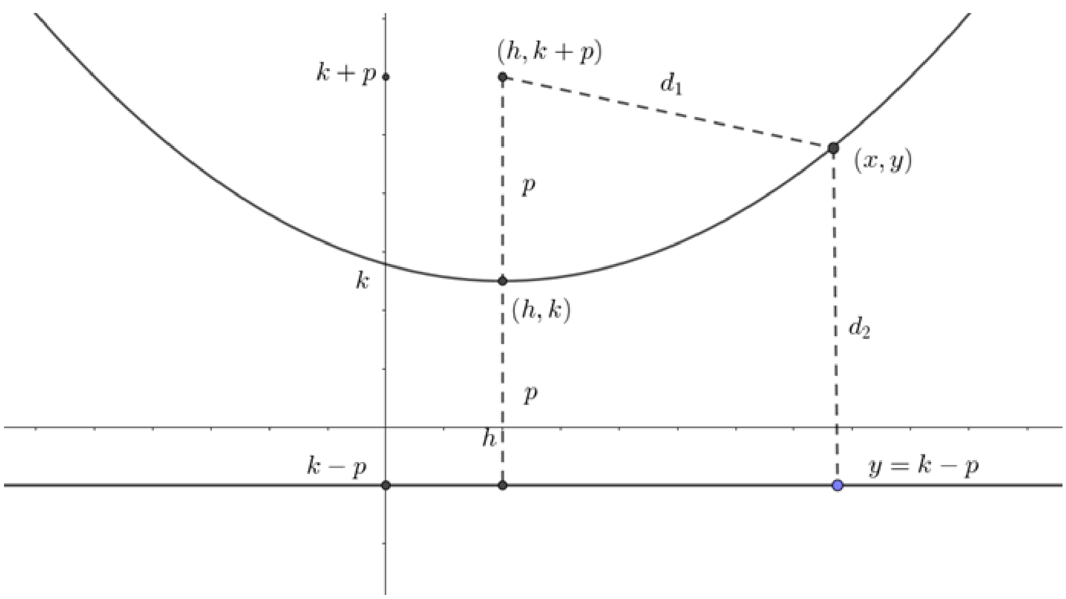
$$\begin{aligned} (x-h)^2+((y-k)-p)^2 &= ((y-k)+p)^2 \\ (x-h)^2+(y-k)^2-2p(y-k)+p^2 &= (y-k)^2+2p(y-k)+p^2 \end{aligned}$$

Reduciendo términos tenemos

$$\begin{aligned} (x-h)^2-2p(y-k) &= 2p(y-k) \\ (x-h)^2 &= 4p(y-k) \end{aligned}$$

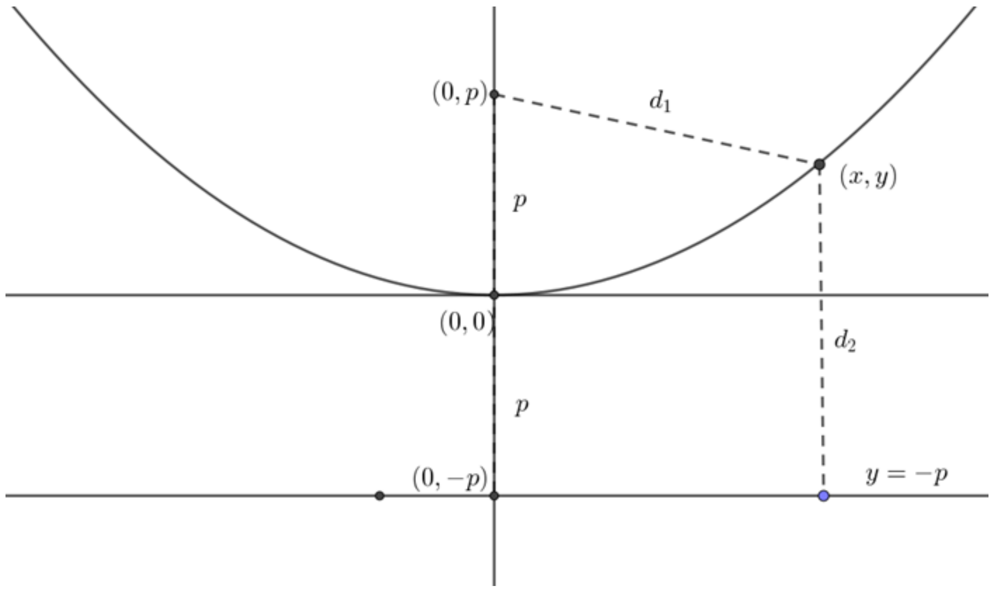
Ecuación de la parábola con vértice (h,k), foco $F=(h,k+p)$ y directriz $y=k-p$

Figura 1.30: Parábola con vértice $(h,k)=v$, foco $F=(h,k+p)$ y directriz $y=k-p$



Caso particular

Figura 1.31: Representación gráfica de la parábola de vértice $(0, 0)$, foco $F = (0, c)$ y directriz $y = -c$



Ejemplo 1.12

Hallar la ecuación de la parábola con vértice en la recta $7x - 3y - 4 = 0$ eje focal paralelo al eje x, que pasa por los puntos: $(3, -5)$ y $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

Solución

Debemos tener en cuenta que la parábola tiene eje focal paralelo al eje x, entonces los puntos satisfacen la ecuación.

$$\begin{aligned} (y-k)^2 &= 4c(x-h) \\ (-5-k)^2 &= 4c(3-h) \qquad (1) \\ (1-k)^2 &= 4c(\frac{3}{2}-h) \qquad (2) \end{aligned}$$

Como el vértice está sobre la recta, se satisface que: $7h - 3k - 4 = 0$ (3).
Ahora resolviendo las ecuaciones (1), (2) y (3) obtenemos que:

$$\begin{aligned} -7k^2 - 12ck &= 68c - 70k - 175 \qquad (4) \\ 7k^2 - 12ck &= 26c + 14k - 7 \qquad (5) \end{aligned}$$

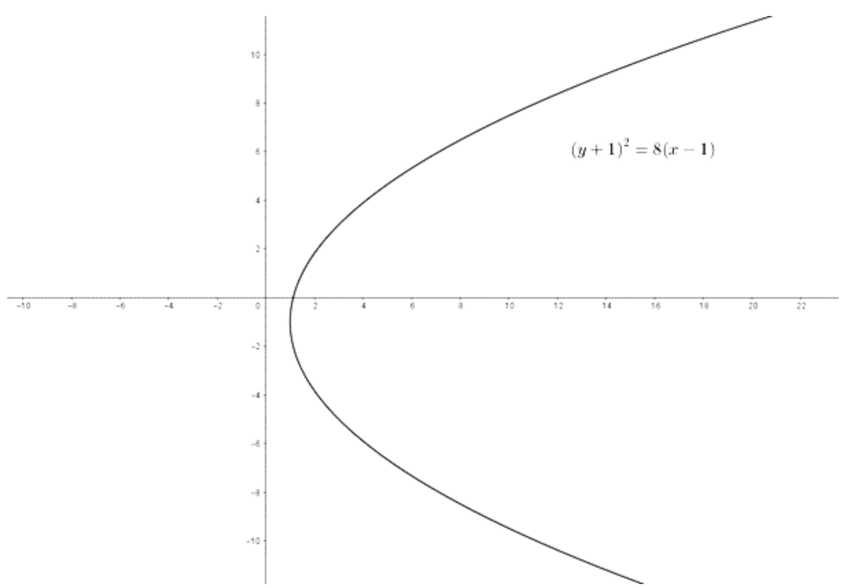
Muestra el proceso de solución del sistema (4) y (5)

De donde se obtiene que: $c = \dfrac{84(k+2)}{42} \Rightarrow c = 2(k+2)$, luego:
$k = -1$, $h = 1$ y $c = 2$ con lo que la ecuación de la parábola es:

$(y+1)^2 = 8(x-1)$

gráficamente se puede observar en la figura 1.33

Figura 1.32: Representación gráfica de la parábola $(y+1)^2 = 8(x-1)$



Ejemplo 1.13

Hallar el vértice, el foco, y la ecuación de la directriz de la parábola dada por la ecuación $y = 4x^2$

Solución

Despejando tenemos: $x^2 = \dfrac{1}{4}y$

De aqui que $h = 0, k = 0 \Rightarrow V = (0, 0)$

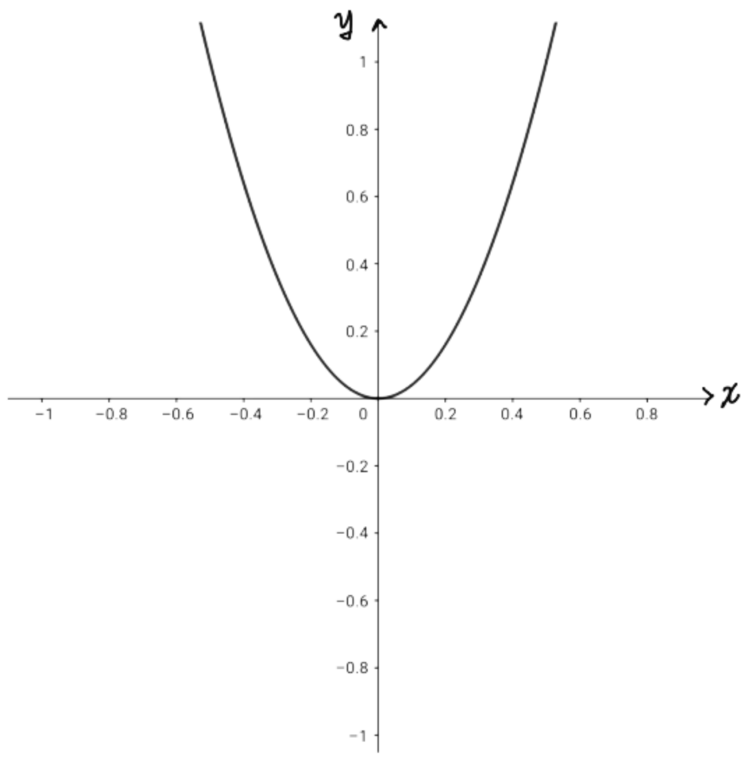
$4c = \dfrac{1}{4} \Rightarrow c = \dfrac{1}{16}$

Foco $(h, k + c) \Rightarrow F = \left(0, 0 + \dfrac{1}{6}\right) \Rightarrow F = \left(0, \dfrac{1}{16}\right)$

La ecuación de la directriz es: $y = k - c \Rightarrow y = 0 - \dfrac{1}{16} \Rightarrow y = \dfrac{-1}{16}$

gráficamente

Figura 1.33: Representación gráfica de la parábola $y = 4x^2$

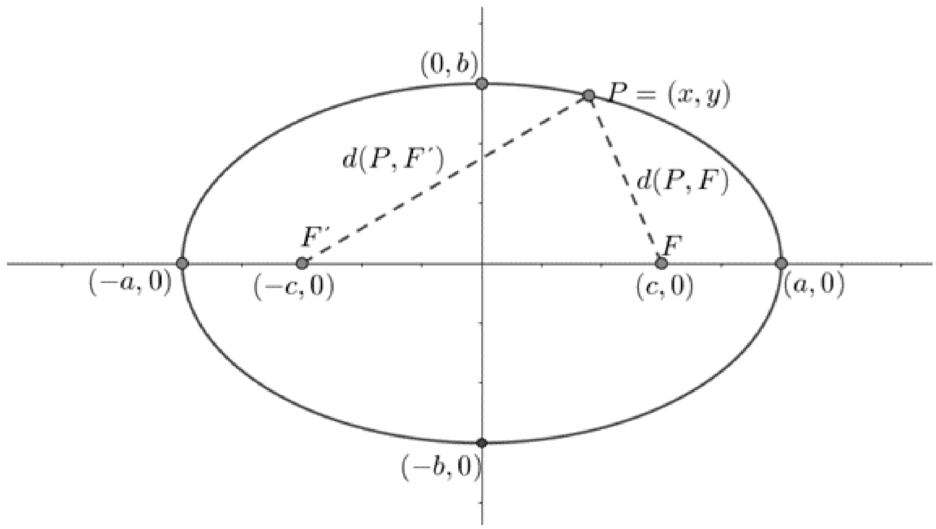


1.2.9 Elipses

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Estos dos puntos fijos se llaman focos de la elipse.

Ecuación analítica de la elipse

Figura 1.34: Representación gráfica de la elipse con centro $(0,0)$, focos $(-c,0)$ y $(c,0)$, lado mayor $2a$ sobre el eje x y lado menor $2b$ sobre el eje y



Para simplificar la explicación ubiquemos a los focos sobre el eje de las x, situados en los puntos $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$. Tomemos un punto cualquiera P de la elipse cuyas coordenadas son (x,y). En el caso de la elipse la suma de las distancias entre PF y PF' es igual al doble del radio sobre el eje x. Entonces: $PF + PF' = 2a$. Aplicando Pitágoras tenemos que:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

Elevando al cuadrado ambos miembros para sacar las raíces y desarrollando los cuadrados queda finalmente:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Si la elipse estuviese centrada en un punto cualquiera (p,q) fuera del origen, la ecuación debería ser:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$$

Si desarrollamos los cuadrados obtendremos que:

$$b^2x^2+a^2y^2-2xpb^2-2yqa^2+p^2b^2+q^2a^2-a^2b^2=0$$

Si hacemos:

$A = b^2$

$B = a^2$

$C = -2pb^2$

$D = -2qa^2$

$E = p^2b^2 + q^2a^2 - a^2b^2$

Tendremos la ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, que es la ecuación general de una elipse, en ella se puede observar una gran similitud con la ecuación de la circunferencia excepto que los términos A y B no tienen porqué ser iguales.

Para las elipses existe un elemento que determina el grado de achatamiento de la figura, este factor se conoce con el nombre de excentricidad, y se define matemáticamente como: $e = \dfrac{c}{a}$

Este valor en el caso de las elipses debe ser menor que 1.

Ejemplo 1.14

Dada la ecuación $4x^2 + 9y^2 + 24x - 8y + 81 = 0$, hállese la ecuación canónica de la elipse que describe esta figura.

Solución

Tenemos que: $A = 4$, entonces, $4 = b^2$ luego, $b = 2$; $B = 9$ entonces, $9 = a^2$ luego, $a = 3$

Los radios de la elipse son: sobre el eje $x = a = 3$; sobre el eje $y = b = 2$. Hallemos en centro (p, q), para esto debemos saber que: $C = 24$, entonces, $24 = -2pb^2$ luego, $p = -3$; $D = -54$ entonces, $-54 = -2qa^2$ luego, $q = 3$.

El centro es, entonces, $(p, q) = (-3, 3)$. Para verificar que se trate de una elipse calculemos E que debe tener el valor de 81.

$$E = p^2b^2 + q^2a^2 - a^2b^2 = 81$$

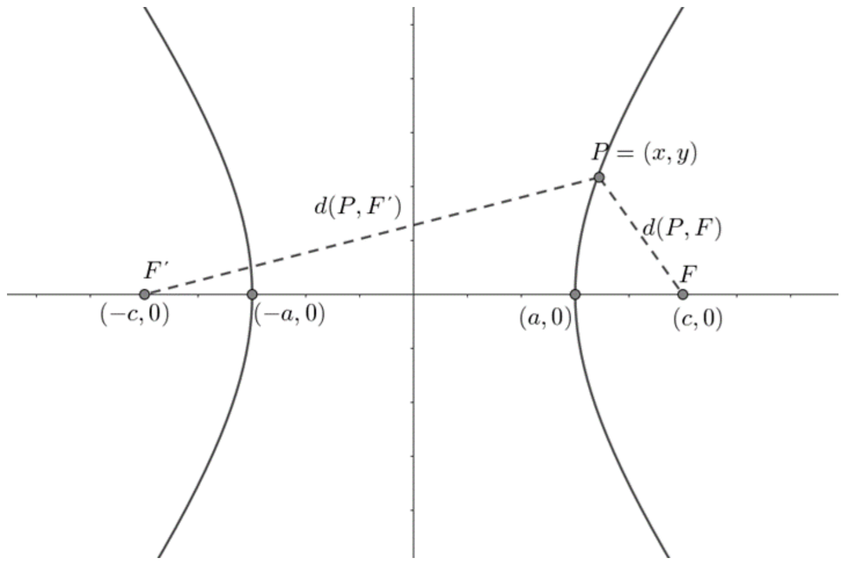
La ecuación de la elipse está dada por $\dfrac{(x+3)^2}{9} + \dfrac{(y-3)^2}{4} = 1$

1.2.10 Hipérbolas

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias entre dos puntos fijos es constante. Estos dos puntos fijos se llaman focos de la hipérbola.

Ecuación analítica de la hipérbola

Figura 1.35: Representación geométrica de la hipérbola con focos $F = (c, 0)$ y $F' = (-c, 0)$ sobre el eje x



Nuevamente ubiquemos los focos sobre el eje x, $F = (c, 0)$ y $F' = (\breve{}c, 0)$, y tomemos un punto cualquiera $P = (x, y)$ de la hipérbola. En este caso, la diferencia de las distancias entre PF y PF' es igual al doble de la distancia que hay entre el centro de coordenadas y la intersección de la hipérbola con el eje x. Entonces tendremos que: $PF\breve{}PF' = 2^a$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y resolviendo podemos llegar a la expresión: $(c^2 - a^2).\ x^2 - a^2y^2 - (c^2 - a^2)a^2 = 0$ pero puedes guiarte con el desarrollo que hicimos para la elipse. Nuevamente a partir del dibujo y aplicando Pitágoras podemos obtener que $c^2 = a^2 + b^2$ y por lo tanto la ecuación nos queda: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Dividiendo cada término por a^2b^2 obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si la hipérbola estuviese centrada en un punto cualquiera (p, q) la ecuación debería ser:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

Si desarrollamos los cuadrados obtendremos que: $b^2x^2 - a^2y^2 - 2xpb^2 + 2yqa^2 + p^2b^2 - q^2a^2 - a^2b^2 = 0$

Si hacemos:
$A = b^2$
$B = -a^2$
$C = -2pb^2$
$D = 2qa^2$
$E = p^2b^2 - q^2a^2 - a^2b^2$

Tendremos la ecuación: $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$, donde podemos gran similitud con las ecuaciones de la circunferencia o la elipse, excepto que los términos A y B no tienen porqué ser iguales.

Para las hipérbolas existe un elemento que determina el grado de achatamiento de la figura, este factor se conoce con el nombre de excentricidad, y se define matemáticamente como: $e = \dfrac{c}{a}$

Este valor en el caso de las hipérbolas debe ser mayor que 1.

Figura 1.36: Representación gráfica de la hipérbola $x^2 - 2y^2 + 3x + 4y + 5 = 0$

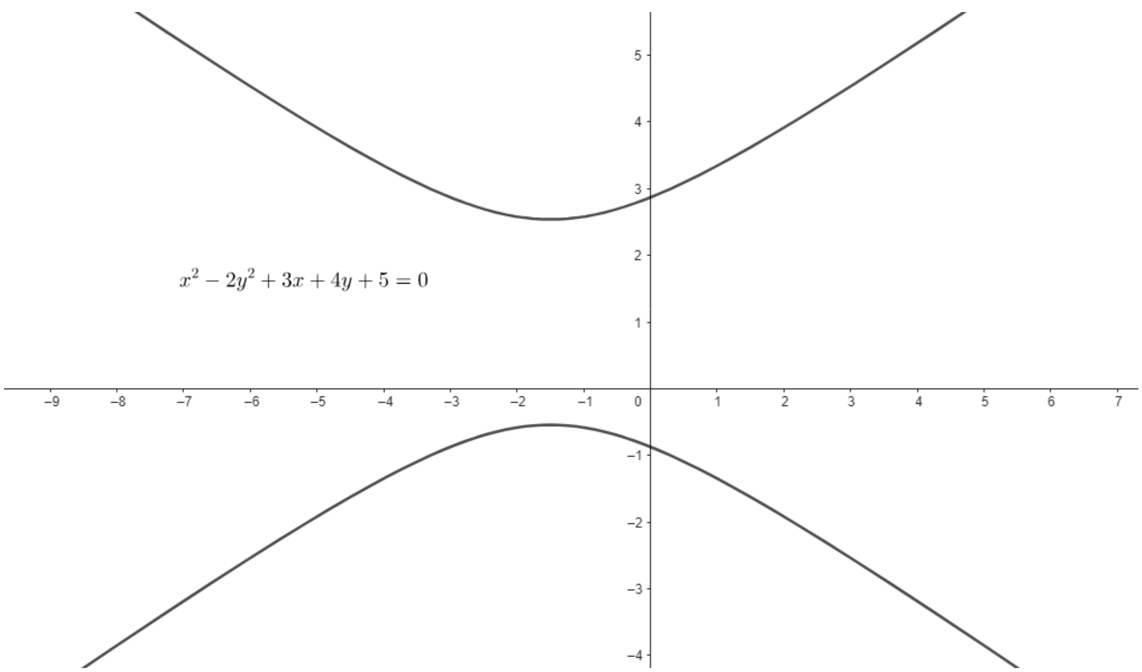


Figura 1.37: Rúbrica de evaluación del aprendizaje: Resuelve problemas matemáticos, cotidianos o situaciones que son susceptibles de representar haciendo uso de conceptos o propiedades de los lugares geométricos y sus representaciones

Criterio	Mínimo	Satisfactorio	Superior
Resolución de problemas	Comprende algunos aspectos de la situación por lo que logra encontrar una solución parcial o particular a problemas que involucran conceptos o propiedades de los lugares geométricos y sus representaciones.	Comprende la situación, formula y ejecuta soluciones correctas para problemas comunes o casos particulares, aunque puede tener dificultades con situaciones no cotidianas que involucran conceptos o propiedades de los lugares geométricos y sus representaciones.	Comprende y formula problemas con precisión en situaciones tanto cotidianas como no cotidianas. Encuentra y justifica soluciones óptimas y creativas para todo tipo de situaciones relacionadas con conceptos o propiedades de los lugares geométricos y sus representaciones
Comprensión conceptual	Muestra una comprensión superficial de conceptos o propiedades de los lugares geométricos y sus representaciones, los utiliza para justificar o argumentar ideas, pero de manera limitada.	Comprende y utiliza adecuadamente conceptos o propiedades de los lugares geométricos y sus representaciones en situaciones cotidianas o simples.	Demuestra una comprensión robusta y detallada de los conceptos o propiedades de los lugares geométricos y sus representaciones y los utiliza correctamente en contextos variados y complejos.
Análisis y desarrollo de procedimientos	Desarrolla procedimientos básicos, o rutinarios en la solución de situaciones sencillas o cotidianas. Carece de un análisis detallado de los pasos a seguir.	Desarrolla procedimientos correctos y coherentes para situaciones comunes y cotidianas. Realiza un análisis adecuado del procedimiento utilizado para la solución de un problema o ejercicio.	Desarrolla procedimientos detallados y precisos para todo tipo de situaciones y realiza un análisis exhaustivo y lógico de los pasos a seguir y detecta errores en procedimientos realizados.
Uso del lenguaje matemático	Utiliza el lenguaje cotidiano para comunicar las ideas y justificar procedimientos y eventualmente usa términos y expresiones propias del lenguaje matemático.	Utiliza el lenguaje matemático de manera correcta y clara en la mayoría de las situaciones, usa terminología y expresiones adecuadas a la situación o al contexto	Utiliza el lenguaje matemático con precisión y claridad en todas las situaciones y comunica ideas complejas de manera efectiva haciendo uso apropiado del lenguaje matemático en cualquier contexto.

Fuente: Elaboración propia.

1.3 Guía de trabajo 1

1. Analizar describir y fundamentar si los puntos $(-2,1)$; $(-1,0)$; $(2,-2)$, están contenidos en una recta.

2. Demostrar que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante de los tres vértices

3. Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta que une los centros de las circunferencias $3x^2+3y^2-18x-30y+27=0$, $5x^2+5y^2-60x-80y+405=0$ y pasa por el punto $(6,5)$.

4. Describir y fundamentar algebraica y gráficamente la parábola cuyo eje focal es paralelo al eje y, pasa por los puntos $(0,3)$; $(3,4)$; $(4,11)$

2 Funciones

El concepto de función ha recorrido un largo camino a través de la historia. Sus orígenes se remontan a la antigua Grecia, donde geómetras como Euclides y Arquímedes lo utilizaban para estudiar relaciones entre magnitudes como la longitud, el área y el volumen. En ese entonces, la función se concebía como una relación entre dos conjuntos de números, donde cada elemento del primer conjunto (dominio) se asociaba con un único elemento del segundo conjunto (codominio).

Sin embargo, no fue hasta el siglo XVII que el concepto de función comenzó a tomar una forma más abstracta. René Descartes, con su innovadora geometría analítica, introdujo la notación funcional y sentó las bases para el estudio de las funciones como expresiones matemáticas. Gottfried Leibniz, por su parte, acuñó el término “función” y contribuyó a su desarrollo formal.

A lo largo del siglo XVIII, el concepto de función continuó evolucionando gracias a las aportaciones de matemáticos como Leonhard Euler y Joseph-Louis Lagrange, quienes profundizaron en su estudio y aplicaciones. En el siglo XIX, Augustin-Louis Cauchy y Karl Friedrich Gauss sentaron las bases para el análisis moderno, donde el concepto de función se convirtió en un elemento central para el estudio del cambio y el movimiento.

En la actualidad, las funciones se utilizan para modelar fenómenos del mundo real, analizar relaciones de dependencia y resolver problemas complejos en el contexto de las matemáticas y en diversas áreas del conocimiento, desde la física y la ingeniería hasta la economía y las ciencias sociales.

Resultado de aprendizaje

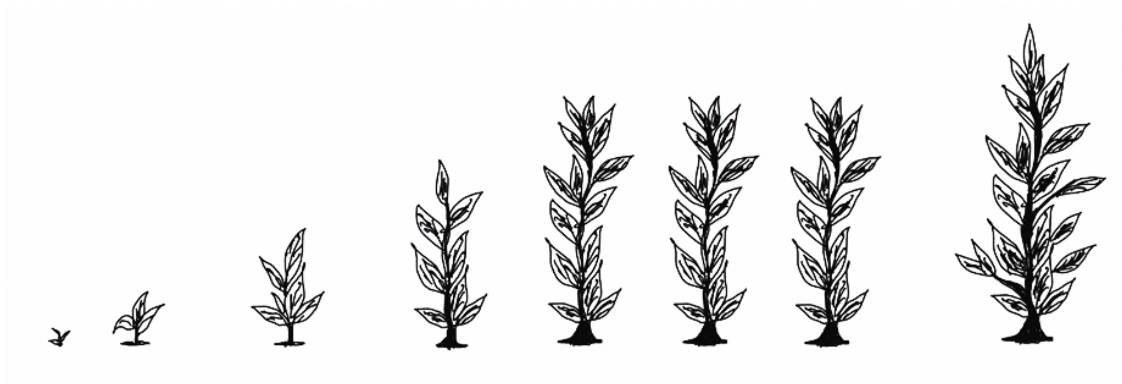
Formula y resuelve situaciones del contexto cotidiano, de las matemáticas o de las otras ciencias, que involucran relaciones entre dos variables que se pueden modelar numéricamente, gráficamente o algebraicamente.

Activación de saberes previos

Situación 1

Razonemos un poco. ¿Qué situación describe la imagen en la figura 3.5?

Figura 2.1: Ilustración situación 1



Comparte tus comentarios

Ahora imagina que la imagen en la figura 3.5 describe el crecimiento semanal de una planta a partir de su germinación.

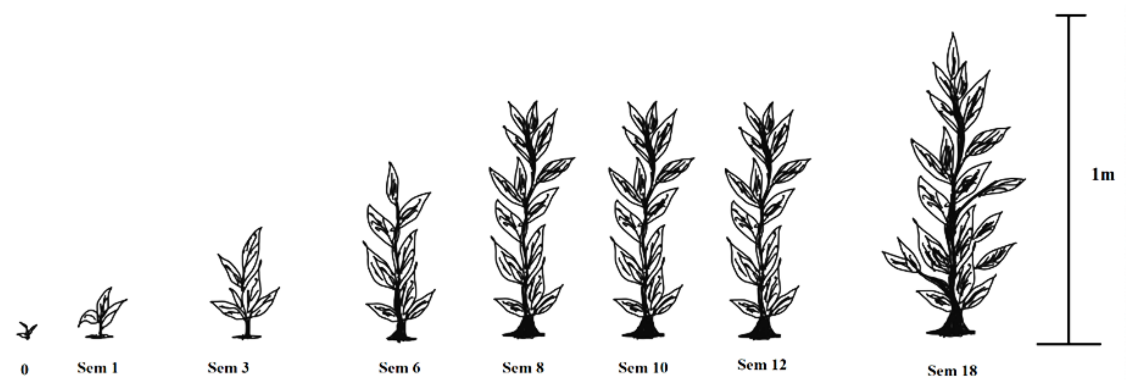
¿Sabes qué es una variable? Investiga y comparte la información, luego escribe dos variables que se relacionen en la situación descrita en la imagen de la figura 3.5.

Dos variables que pueden estar relacionadas según la situación descrita en la imagen son: Altura de la planta "llamémosla y" y el tiempo transcurrido a partir de su germinación "llamémoslo t". Ya tenemos las variables, ahora debemos definir las unidades de medición y luego hacer asignaciones numéricas, ten en cuenta que esto debe ser lo mas ajustado posible a la realidad.

Piensa en las unidades que debemos usar en esta situación y comparte tus ideas.

Supongamos que se trata de una planta que no alcanza gran altura, es decir, definamos las unidades de la altura de la planta en centímetros y el tiempo en semanas. La imagen en la figura 2.2 ahora describe el crecimiento de una planta de tomates bajo ciertas condiciones climáticas (Investiga otras plantas cuyo crecimiento pueda ser descrito con la imagen)

Figura 2.2: Ilustración del crecimiento de una planta con el transcurrir de 18 semanas después de su germinación.



El crecimiento de la planta descrito en la imagen anterior se puede escribir numéricamente en una tabla de la siguiente manera.

Tabla 2.1: Representación numérica del crecimiento de la planta descrito en la imagen

Tiempo en semanas	0	1	3	6	8	10	12	18	20
Altura en centímetros	8	15	32	55	80	80	80	94	?

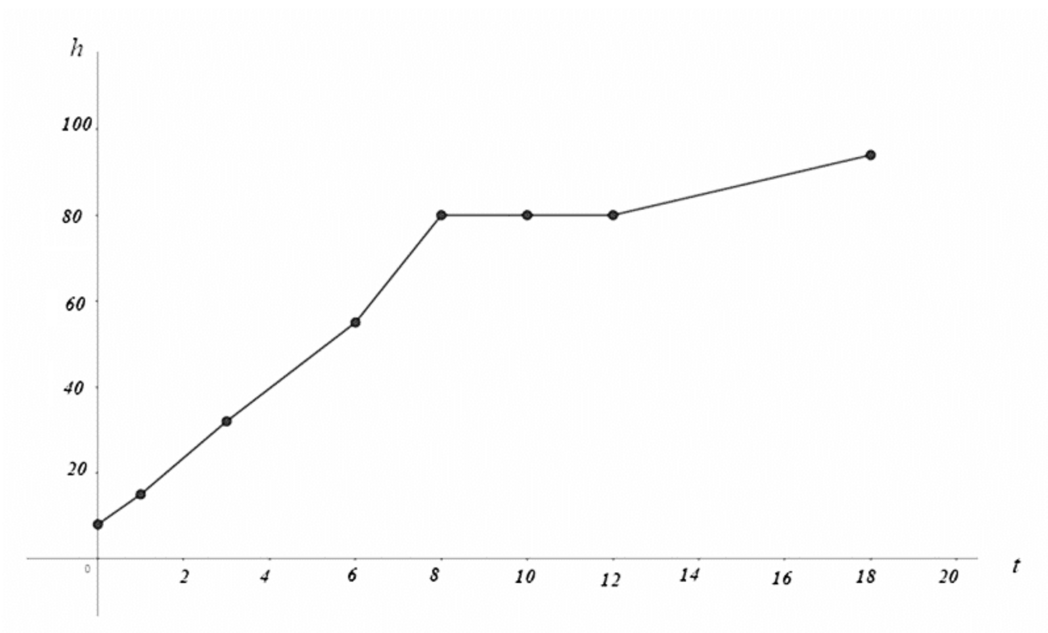
¿Consideras que las estimaciones numéricas de la tabla se ajustan a la imagen? Justifica ¿Es posible estimar la altura de la planta en la semana 20? ¿de qué depende? Justifica y comparte tu razonamiento.

Si t representa el tiempo en semanas "t=tiempo" y h representa la altura de la planta en centímetros "h=altura" la situación describe la relación que existe entre la altura de la planta y el tiempo en semanas, es decir, h depende de t, si se forman parejas ordenadas con la información de la tabla resultaría el conjunto.

$$F = \{(0,8),(1,15),(3,32),(6,55),(8,80),(10,80),(12,80),(18,94)\}$$

El cual se puede representar gráficamente en el plano cartesiano, eligiendo h para el eje vertical y t para el eje horizontal, como se muestra en la figura 2.3

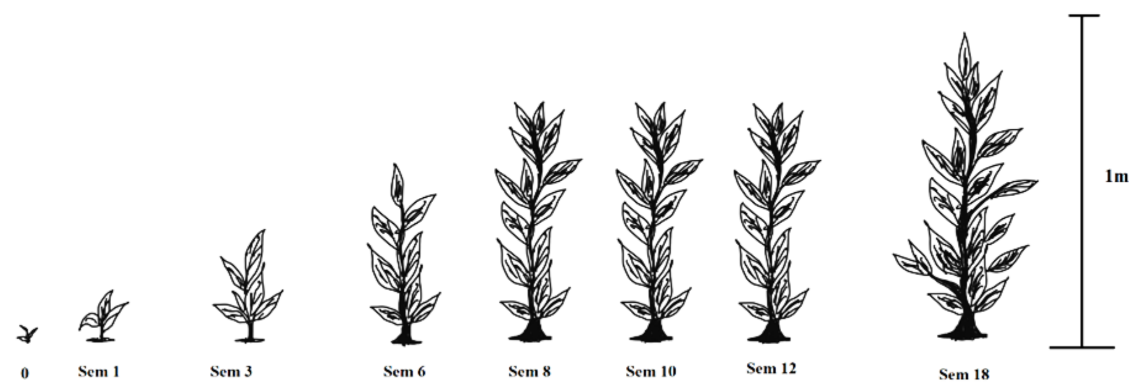
Figura 2.3: Representación gráfica en el plano del crecimiento de la planta



La relación entre la altura de la planta y el tiempo en semanas transcurrido desde la germinación se puede escribir matemáticamente de la siguiente manera $h = f(t)$ a la expresión matemática que describe la relación $f(t)$ se le llama representación algebraica. En resumen, se pueden encontrar diferentes tipos de representación que describen la relación entre dos variables, a saber, representación verbal, mediante una descripción de la situación, representación gráfica o icónica, mediante un dibujo o gráfica en el plano cartesiano, representación numérica, mediante una tabla de valores y representación algebraica, mediante una expresión matemática, todas ellas equivalentes. ¿Existe otro tipo de representación? ¿Cuáles? Comparte.

Regresando a la situación descrita en la imagen de la figura 2.4, surgen preguntas que se pueden resolver a partir de la información suministrada.

Figura 2.4: Representación gráfica en el plano del crecimiento de la planta



¿Cuál es la altura de la planta en la semana 6? ¿Qué ocurre con la altura de la planta en las semanas 8, 10 y 12 y qué significa? ¿es eso posible?

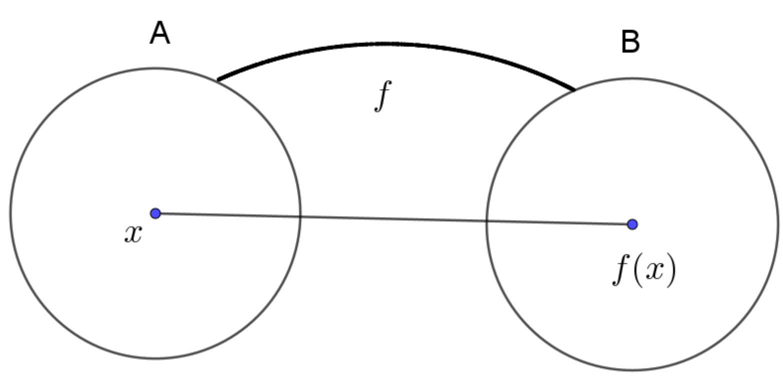
Note que, la altura de la planta en las semanas $8, 10$ y 12 es la misma, esto se escribe matemáticamente $f(8) = f(10) = f(12) = 80$ e indica que entre las semanas 8 y 12 la planta no creció, es decir, en el intervalo $[8, 12], h = f(t)$ se mantiene constante, esto significa que las relaciones $(a, b), (c, b)$ para $a \neq c$ pueden existir y tienen sentido, en el caso de la situación anterior esto quiere decir, que el tiempo transcurre pero la planta no crece, sin embargo, las relaciones (a, b) y (a, c) para $b \neq c$ no pueden ser posibles, ya que indicarían que para un mismo instante de tiempo la planta tiene dos alturas diferentes.

2.1 Construcción del concepto de función

Definición 2.1

Dados A y B conjuntos no vacíos, a la relación entre los elementos de A y B, que asigna a cada elemento $x \in A$ un único elemento $y \in B$ se le denomina función de A en B, si esa relación se describe mediante una regla f entonces se escribe $y = f(x)$, esta definición proporciona una idea intuitiva del concepto de función, el cual puede ser definido de manera más formal.

Figura 2.5: Ilustración del concepto de función.



A x se le denomina variable independiente y a la variable y se le denomina dependiente, al conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente para los cuales la regla f tiene sentido se le llama dominio de la función, y al conjunto de todos los valores que puede tomar la variable dependiente se le conoce como codominio o rango de la función.

En resumen

1. El elemento $f(x)$ se llama "imagen de x bajo f" ó "valor de f en x".
2. El conjunto A se llama **Dominio** de f y se denota D_f.
3. El conjunto de las imágenes de los elementos de A se llama **Rango de** f y se denota R_f, es decir

$$R_f = \{f(x) : x \in D_f\}$$
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \big/ f(x) \text{ tiene sentido}$$

Por ejemplo, la relación descrita en la situación 1, entre la altura de la planta y el tiempo en semanas transcurrido después de su germinación, se puede representar mediante una función, donde h=altura es la variable dependiente y t=tiempo, la variable independiente, además, el dominio de la función es el intervalo [0,18] y el rango es el intervalo [8,94] ver figura xxxx

Ejemplo 2.1

Una empresa anota en una tabla las ventas semanales de cierto artículo y su precio en dólares.

Precio en dólares	8	10	11	12	13	14	15
Ventas en miles de dólares	2000	1800	1400	1350	1100	1000	700

¿Qué representan las variables dependiente e independiente en la situación y cuáles son? Explica.

¿Qué representa la pareja ordenada (12,1350)? explica

¿Qué ocurre con las ventas si el precio de los artículos aumenta?

Representa gráficamente la situación. ¿Puedes encontrar una expresión algebraica que describa la relación? ¿Cuál es? Fundamenta tus respuestas y muestra el procedimiento.

N Una función expresa la idea de que una cantidad depende o está determinada por otra. Por ejemplo, **la estatura** de una persona depende de su **edad**, el **número de bacterias** en un cultivo depende del **tiempo**, el **precio** de una mercancía depende de la **demanda** de esa mercancía, la **longitud** de una circunferencia depende del **radio** de la misma. El **costo semanal** de producir cualquier artículo depende del **número de artículos** producidos.

Las funciones están presentes cada vez que una cantidad depende de otra

1. La longitud de una circunferencia depende del radio de la misma $L = 2\pi r$

r	1	1,5	$\cdots$
L	2π	$2\pi(1,5)$	$\cdots$

2. La población humana de la tierra depende del tiempo

Año	1900	1910	$\cdots$	1950	$\cdots$
P (en millones)	1650	1750	$\cdots$	2520	$\cdots$

2.2 Gráfica de una función f en un plano cartesiano

Gráfica de $f = \{(x, f(x))\big/ x \in D_f\} = \{(x, y) : x \in D_f, y = f(x)\}$
La ecuación $y = f(x)$ se llama **Ecuación de la gráfica de** f, es decir

$$(x, y) \in \text{ Gráf de } f \Leftrightarrow y = f(x)$$

En resumen la gráfica de una función es la representación en el plano $\mathbb{R}^2$ del conjunto

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big/ y = f(x)\}$$

Por ejemplo: La siguiente tabla describe el costo en miles de pesos de producir ciertos artículos.

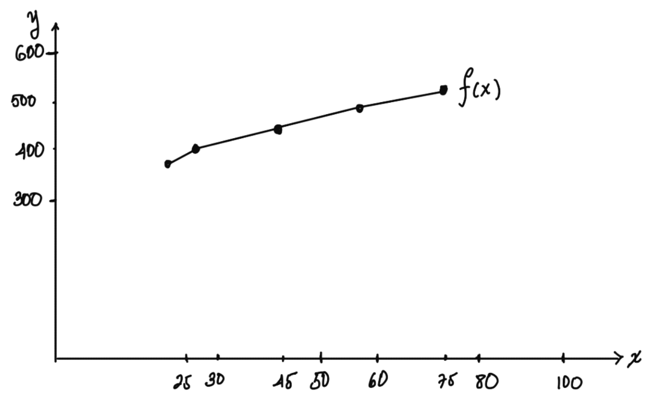
Cantidad de artículos	25	30	45	60	80	$\cdots$
Costo en miles	400	420	470	515	535	$\cdots$

Si llamamos x = cantidad de artículos producidos e y = costo de producción en miles, entonces $y = f(x)$, si formamos las parejas (x, y) se obtiene

$$G_f = \{(25, 400), (30, 420), (45, 470), (60, 515), (80, 535), \cdots\}$$

La representación en el plano xy del conjunto G_f es la gráfica de $y = f(x)$

Figura 2.6: Ilustración del concepto de función.



Ejemplo 2.2

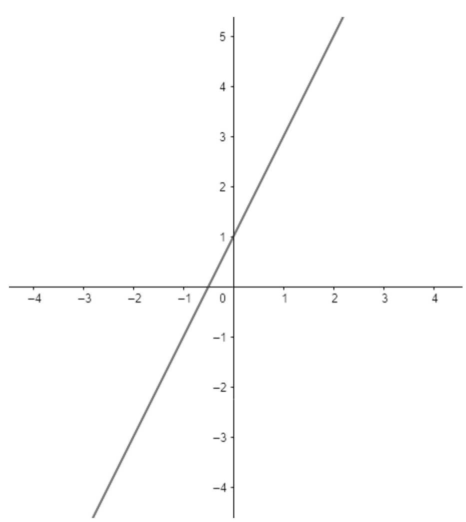
Representar gráficamente cada una de las siguientes funciones y especificar el dominio

$a)\ f(x) = 2x + 1 \qquad b)\ f(x) = x^2 \qquad c)\ f(x) = \sqrt{x}$

Solución a)

Por definición la gráfica de f es la representación en el plano del conjunto $G_f = \{(x, y) \big/ y = f(x)\}$, es decir $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big/ y = 2x + 1\}$, lo cual representa una recta de pendiente $m = 2$ que corta al eje y en $b = 1$

Figura 2.7: Representación gráfica de la función $f(x) = 2x + 1$



Note que $f(x)$ está definido para todo $x \in \mathbb{R}$ luego $Dom\, f = \mathbb{R}$

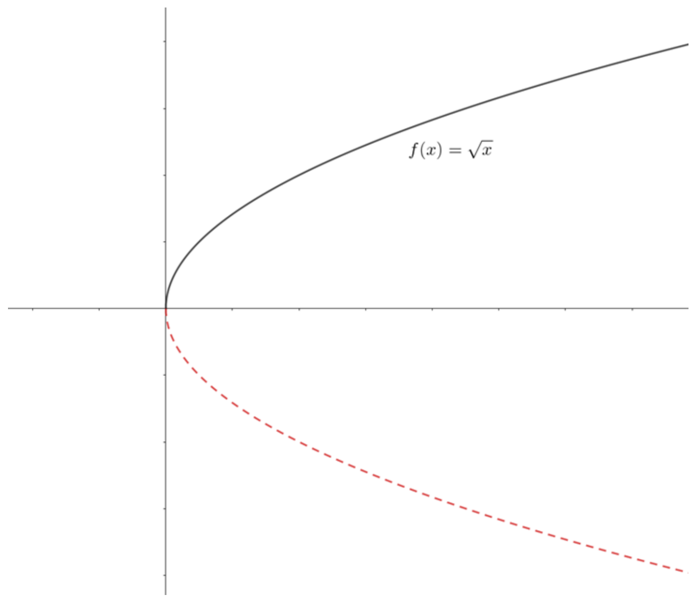
Solución b) Muestra tu solución

Solución c)

Por definición la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, es la representación en el plano xy del conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big/ y = \sqrt{x}$ pero $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 = x$, lo cual representa una parábola con vértice en $(0, 0)$ y eje focal sobre el eje x.

Representamos la parte positiva de la parábola.

Figura 2.8: Representación gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$



Note que $\sqrt{x} = y$ solo está definida para $x \geq 0$, luego

$Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \big/ x \geq 0\} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Elabora la representación gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ usando una tabla de valores, muestra tu solución.

Actualmente existen programas que facilitan la construcción y visualización de gráfica de funciones, uno de ellos es Geogebra, siendo esta una herramienta educativa y de visualización matemática poderosa que combina geometría, álgebra, cálculo, estadísticas y gráficos en una sola plataforma interactiva.

2.3 Funciones definidas por ramas

Son funciones definidas de manera diferente en partes distintas del dominio

Ejemplo 2.3

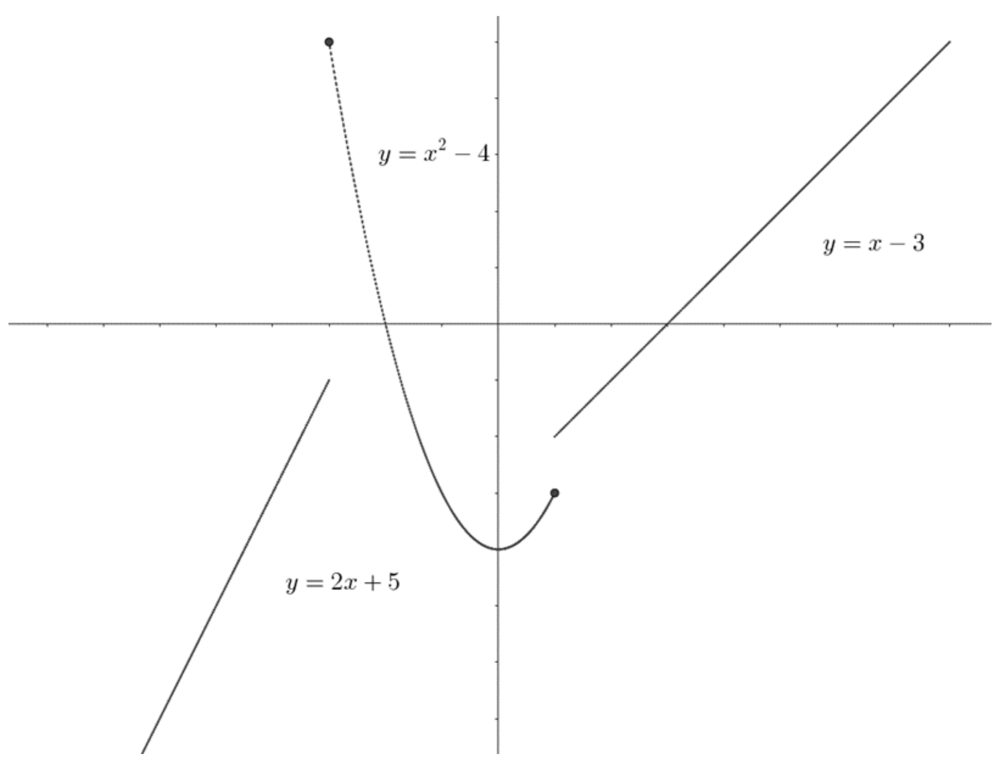
Trazar la gráfica de la función, hallar dominio y rango

$$F(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } x \leq -3 \\ x^2 - 4 & \text{si } -3x < x < 1 \\ x-3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución

Recuerde que una función es una regla. Para esta función particular la regla es la siguiente: primero vea el valor de la entrada x. Si ocurre $x \leq -3$, entonces el valor de $F(x)$ es $2x+5$. Si ocurre que $-3 < x < 1$, entonces el valor de $F(x)$ es $x^2 - 4$. Por otra parte, si $x \geq 1$, entonces el valor de $F(x)$ es $x - 3$. Luego representamos la gráfica correspondiente a cada uno de los intervalos.

Figura 2.9: Representación gráfica de $F(x)$.



Note que x toma valores en todo $\mathbb{R}$ luego $Dom\, f = \mathbb{R}$

2.4 Simetría: funciones pares e impares

Sea f una función

a) La gráfica de f es simétrica respecto al eje y si y sólo si $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in D_f$.

Una función con esta propiedad se dice que es una función **par**.

Ejemplos: $f(x) = x^2$ y $f(x) = |x|$

Figura 2.10: Ilustración de la gráfica $f(x) = x^2$

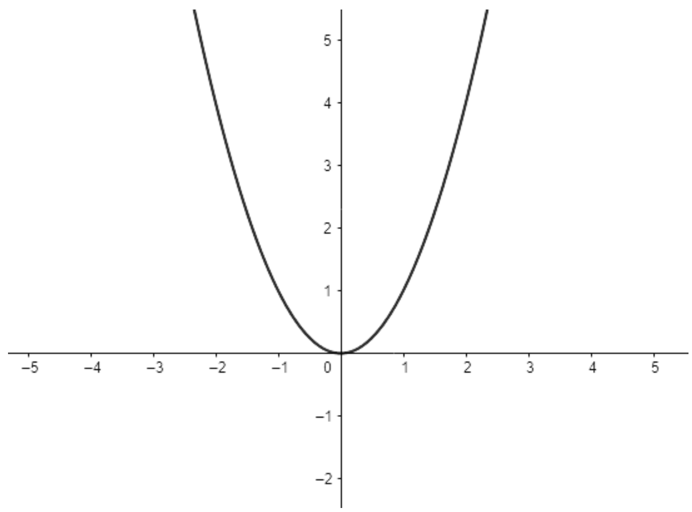
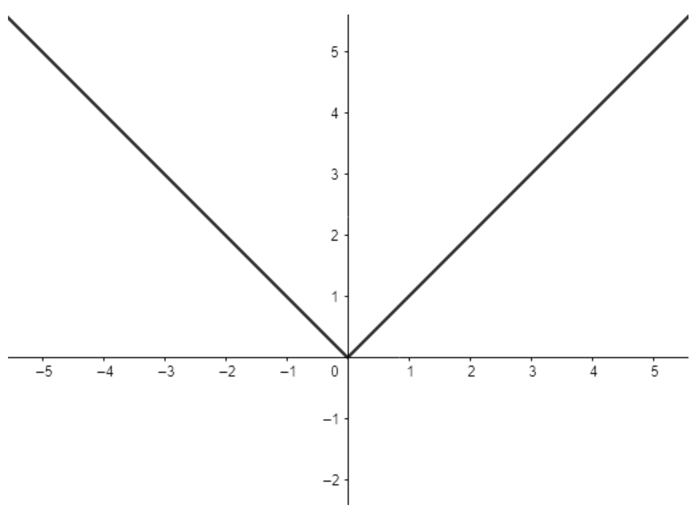


Figura 2.11: Ilustración de la gráfica $f(x) = |x|$



b) La gráfica de f es simétrica respecto al origen si y sólo si $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in D_f$. Una función con esta propiedad se dice que es una función **impar**.

Ejemplo 2.4

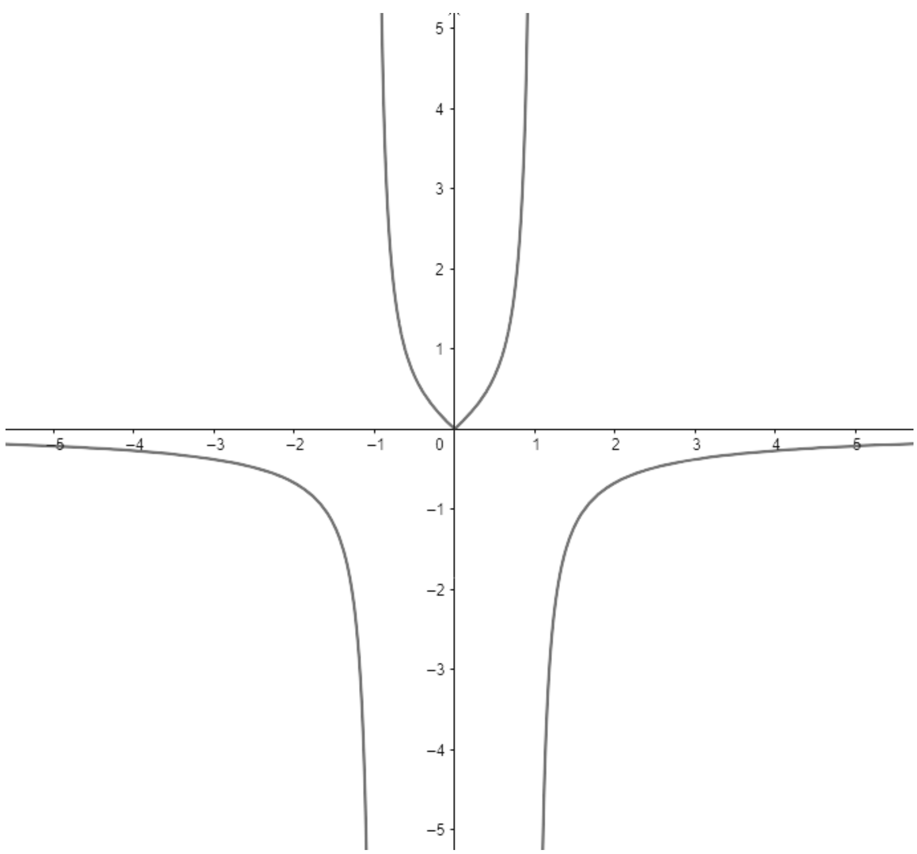
Determinar si la función f dada es par, impar o ninguna

$$a)f(x) = \frac{|x|}{1-x^2} \qquad b)f(x) = x + x^3 \qquad c)f(x) = x + |x|$$

Solución

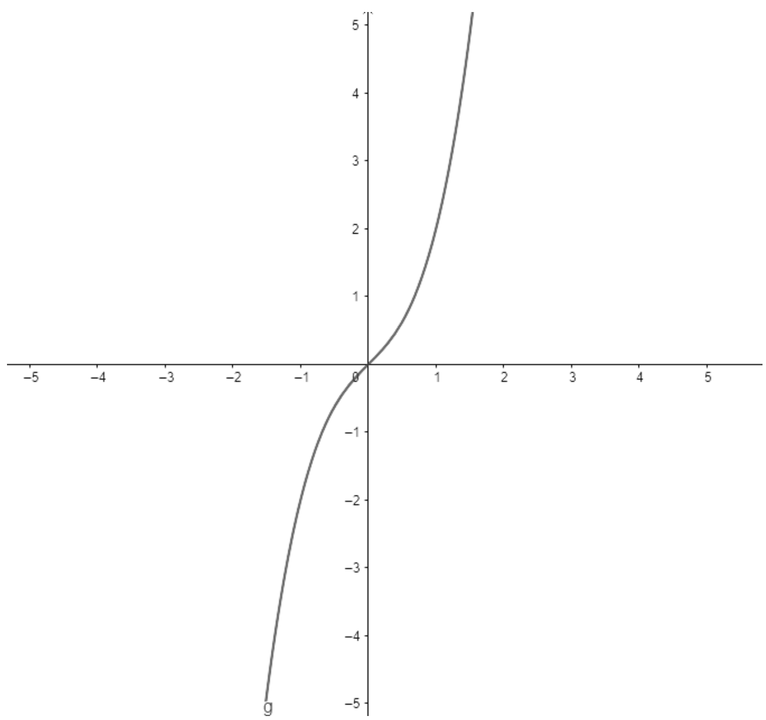
$$a)f(-x) = \frac{|-x|}{1-(-x^2)} = \frac{|x|}{1-x^2}, \text{ por tanto } f \text{ es par.}$$

Figura 2.12: Ilustración de la gráfica $f(x) = \dfrac{|x|}{1-x^2}$



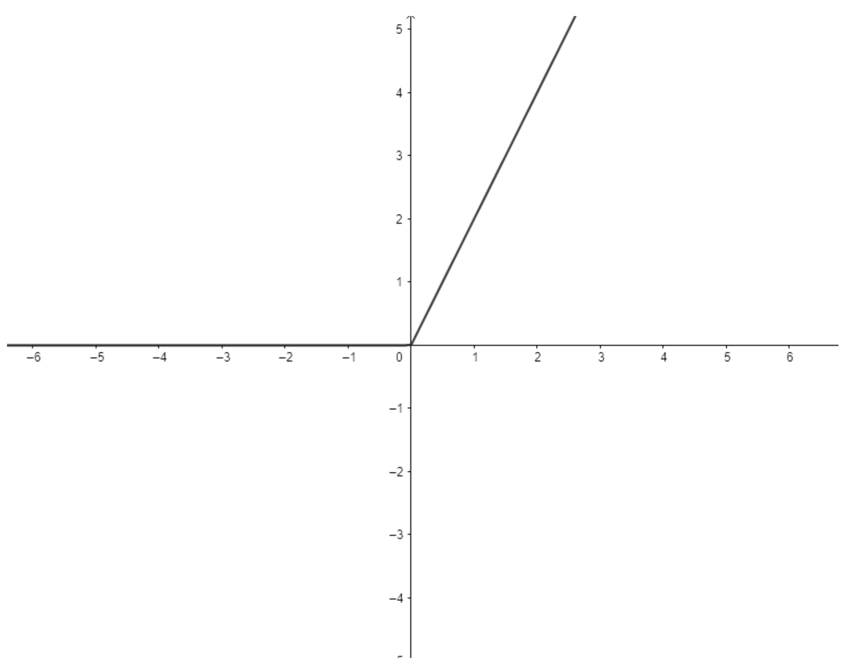
$$b)f(-x) = (-x) + (-x)^3 = -x - x^3 = -(x + x^3) = -f(x), \text{ por tanto } f \text{ es impar.}$$

Figura 2.13: Ilustración de la gráfica $f(x) = x + x^3$



c) $f(-x) = (-x) + |-x| = -x + |x|$ como $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$ entonces f no es par ni impar

Figura 2.14: Ilustración de la gráfica $f(x) = x + |x|$

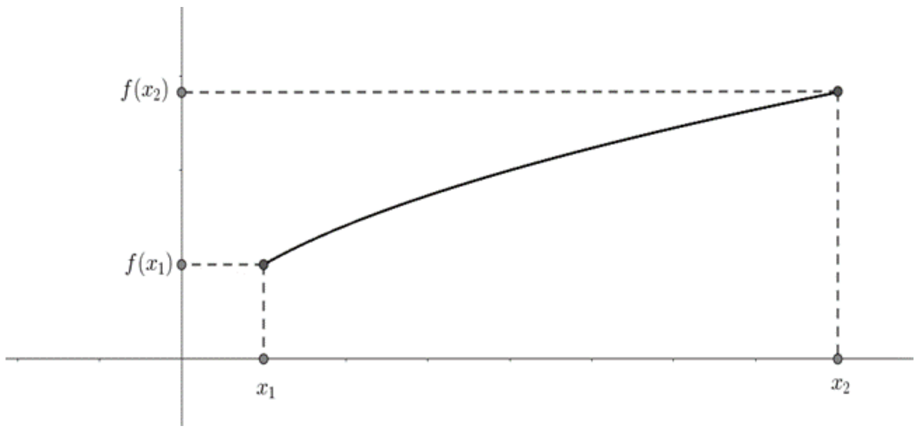


2.5 Funciones crecientes y decrecientes

Sea f una función cuyo dominio contiene un intervalo I.

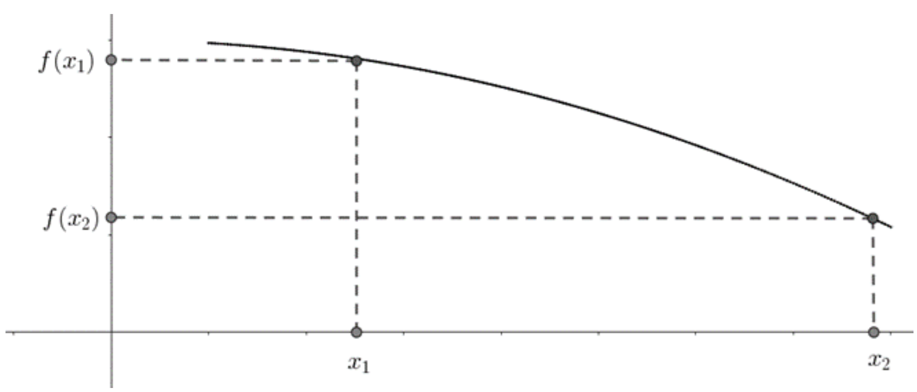
- f se dice creciente en I si para todo $x_1, x_2 \in I$, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Figura 2.15: Representación gráfica de función creciente



- f se dice decreciente en I si para todo $x_1, x_2 \in I$, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

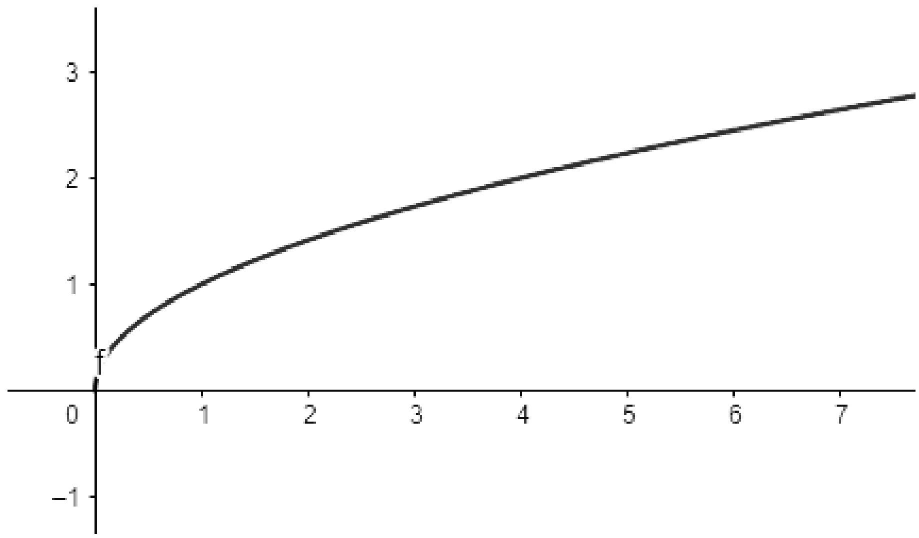
Figura 2.16: Representación gráfica de función decreciente



Ejemplo:

La función $f(x) = \sqrt{x}$ es una función creciente en el intervalo $[0, \infty)$ puesto que dados $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ tales que $x_1 < x_2$ entonces $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ esto es $f(x_1) < f(x_2)$

Figura 2.17: Ilustración de la gráfica $f(x) = \sqrt{x}$



Ejemplo 2.5

Analizar y describir si la función $f(x) = \sqrt{2-3x}$ es creciente o decreciente.

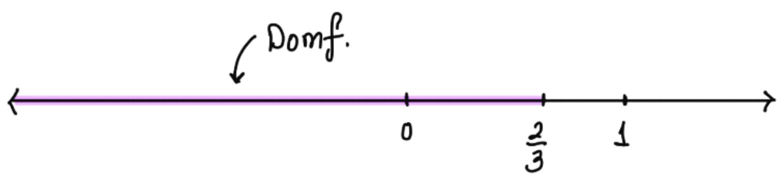
Solución

Determinamos el dominio de la función para encontrar el intervalo donde es eventualmente creciente o decreciente. Por definición $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \big/ f(x) \text{ está definidida}\}$, es decir $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \big/ \sqrt{2-3x} \text{ existe en } \mathbb{R}\}$, pero $\sqrt{2-3x}$ existe si y solo si $2 - 3x \geq 0$ esto es:

$$2 \geq 3x \Leftrightarrow 3x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$$

Por lo tanto $Dom\, f := \left\{x \in \mathbb{R} \big/ x \leq \dfrac{2}{3}\right\}$, gráficamente

Figura 2.18: Representación gráfica de $Dom\, f := \left\{x \in \mathbb{R}/x \leq \dfrac{2}{3}\right\}$



Ahora verifique si en $\left\{x \in \mathbb{R} \big/ x \leq \dfrac{2}{3}\right\}$ $f(x) = \sqrt{2-3x}$ es creciente o decreciente e ilustra gráficamente.

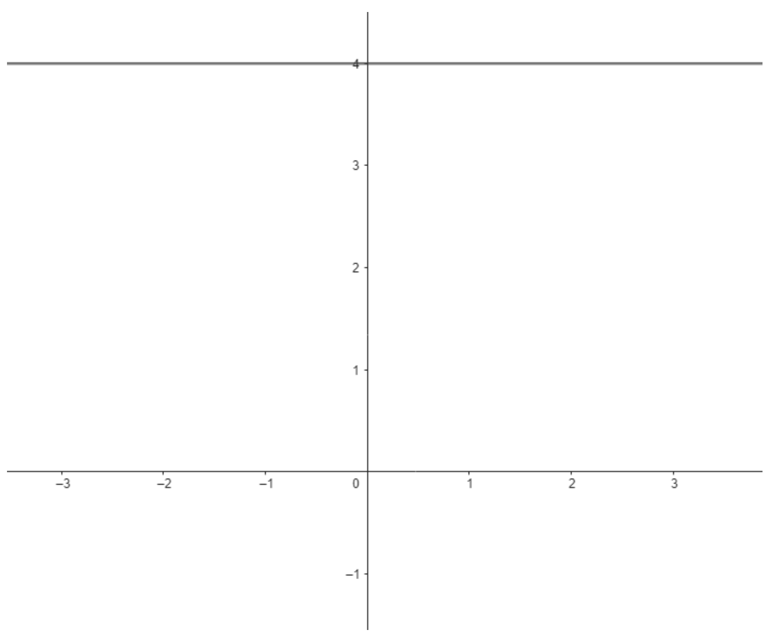
2.6 Ejemplo de funciones reales

2.6.1 Función constante

Es aquella que asigna el mismo valor de salida a todas las entradas dentro de su dominio. Su representación formal se expresa como $f(x) = k$, donde k es un número real constante. Esta expresión indica que, independientemente del valor de x, el valor de la función siempre será k.

La gráfica de una función constante es una línea recta horizontal, paralela al eje x, que pasa por el punto $(0, k)$. La pendiente de esta línea recta es cero, lo que refleja la naturaleza constante de la función.

Figura 2.19: Gráfica de la función $f(x) = 4$



2.6.2 Función lineal

la función lineal se presenta como una relación fundamental entre dos variables, x e y, expresada mediante la fórmula $y = mx$, donde m es una constante que indica su inclinación respecto al eje x. La gráfica de una función lineal es una línea recta que intersecta el eje y en el punto $(0, 0)$.

Figura 2.20: Gráfica de la función $f(x) = mx, m > 0$

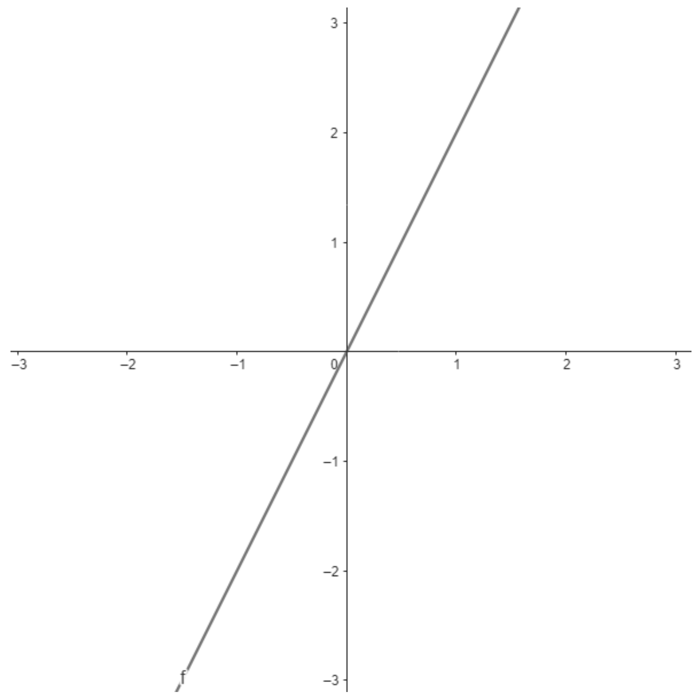
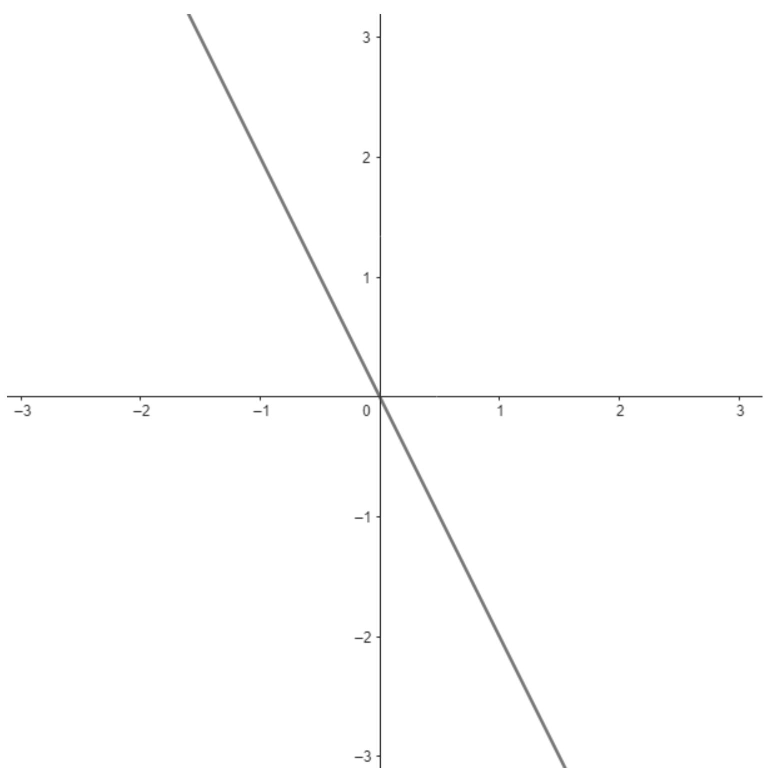


Figura 2.21: Gráfica de la función $f(x) = mx, m < 0$



2.6.3 Función afín

La función afín viene dada por la expresión $f(x) = mx + b$, donde m y b son números reales. La gráfica de una función afín es una línea recta cuya pendiente es m e intersecta el eje y en el punto $(0, b)$. La función afín se diferencia de la función lineal en su intersección con el eje y. La presencia del término b en la ecuación permite que la línea recta se mueva verticalmente, ubicando su punto de intersección con el eje y en un punto arbitrario del plano cartesiano.

Figura 2.22: Gráfica de la función $f(x) = mx + b, m > 0, b > 0$

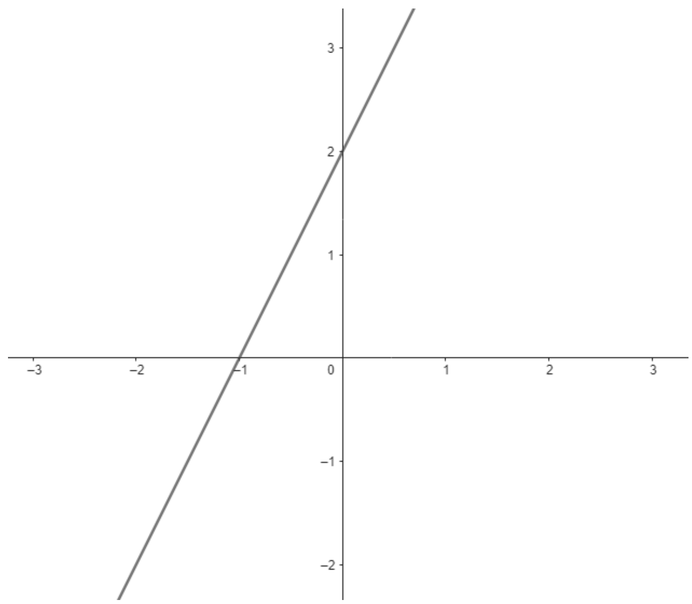
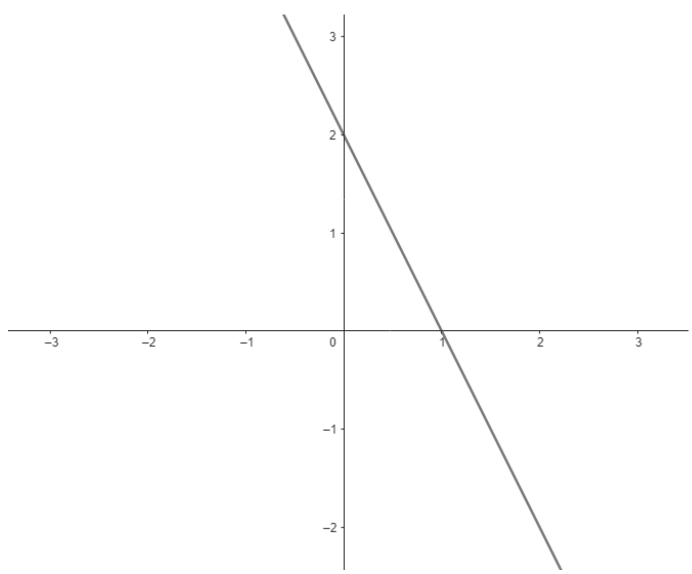


Figura 2.23: Gráfica de la función $f(x) = mx + b, m < 0, b > 0$



2.6.4 Función cuadrática

la función cuadrática se presenta como una función polinomial de segundo grado, expresada como $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales, y $a \neq 0$. Su característica principal es la presencia de un término con x elevado a la potencia 2, lo que le da a la función su forma distintiva.

La gráfica de una función cuadrática es una parábola, con vértice $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$. La forma y posición de la parábola están determinadas por los valores de a, b y c.

Veamos

$$\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
y - c &= ax^2 + bx \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) \\
y - c + \frac{b^2}{4a} &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\left(y - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \tag{2.1}$$

Si evaluamos f en $\frac{-b}{2a}$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{b}{2a}\right) &= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\
&= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c \\
&= c - \frac{b^2}{4a}
\end{aligned}$$

Reemplazando $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a}$ en la ecuación (2.1) se obtiene

$$\left(y - f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2$$

Lo que representa una parábola de vértice $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

Ahora, la gráfica de f corta al eje x cuando $f(x) = 0$, es decir, $y = 0$ esto es, $ax^2 + bx + c = 0$

De donde se deduce $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, siempre que $b^2 - 4ac > 0$

Figura 2.24: Gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$

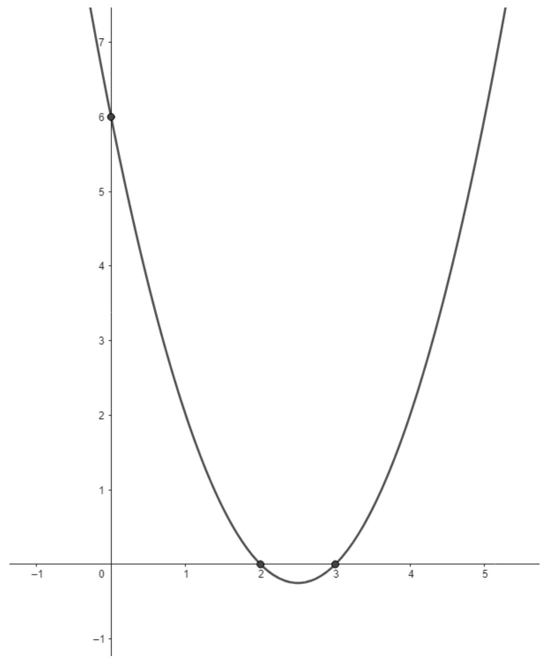
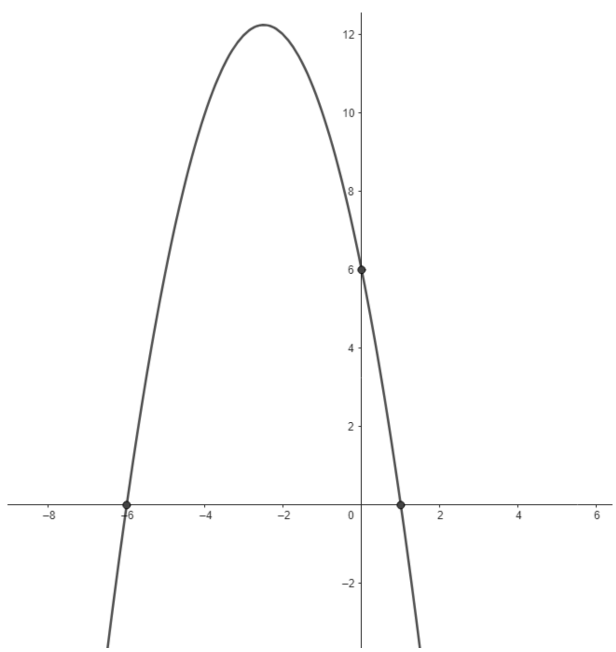


Figura 2.25: Gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c, a < 0$



Ejemplo 2.6

Estudiar el comportamiento de la función $f(x) = x^2 + 3x + 10$

Solución

Identificamos $a, b, c \quad a = 1, b = 3, c = 10$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{(2)(1)} = -\frac{3}{2}$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f\left(\frac{-3}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{2}\right) + 10$$
$$= \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 10 = -\frac{9}{4} + 10 = \frac{31}{4}$$

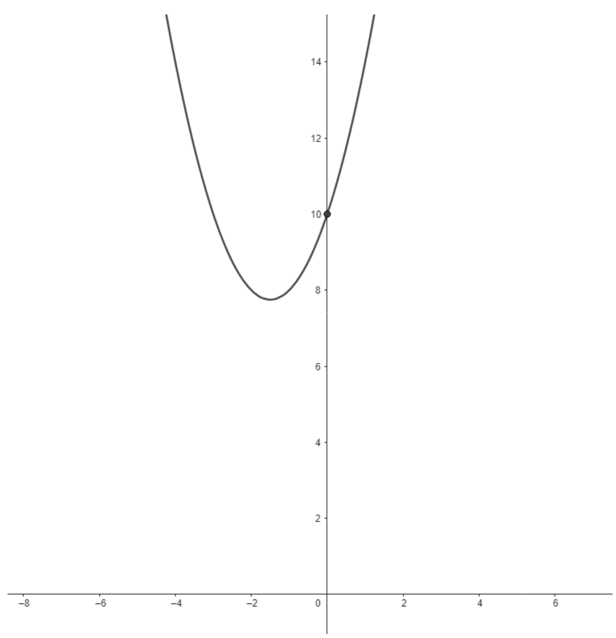
Por lo que el vértice viene dado por $V = \left(-\frac{3}{2}, \frac{31}{4}\right)$

Ahora como $b^2 - 4ac = 9 - 4(1)(10)$
$$= 9 - 40 = -31 < 0$$

Entonces la gráfica no corta al eje x.

Corta al eje y cuando $x = 0$ esto es $f(0) = 0^2 + 3(0) + 10 = 10$

Figura 2.26: Gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3x + 10$

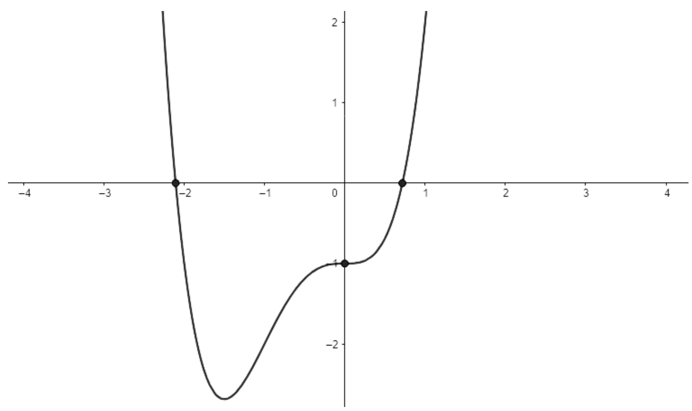


Funciones polinómicas

La expresión general de una función polinomial se define como $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1 y a_0$ son coeficientes reales, y $a_n \neq 0$ (para que la función sea considerada de grado n).

Las gráficas de las funciones polinómicas pueden adoptar diversas formas, desde líneas rectas hasta curvas complejas con múltiples puntos de inflexión. La forma específica de la gráfica depende del grado de la función y de los valores de sus coeficientes.

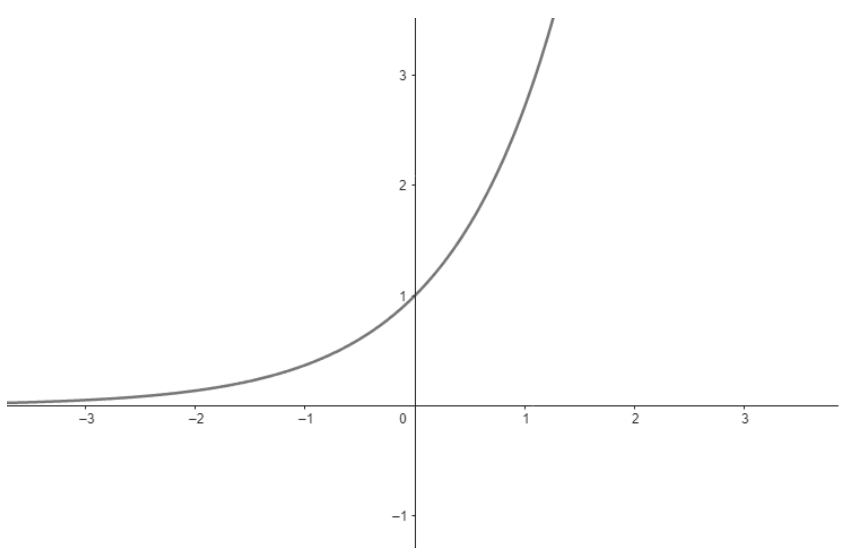
Figura 2.27: Gráfica de la función polinómica $f(x) = x^4 + 2x^3 - 1$



2.6.5 Funciones exponenciales

la función exponencial se presenta como una de las funciones más importantes por su capacidad para modelar fenómenos de crecimiento o decrecimiento a un ritmo acelerado. Se define como $f(x) = a^x$, donde a es un número real positivo $(a > 0)$ y x es cualquier número real.

Figura 2.28: Gráfica de la función $f(x) = e^x$

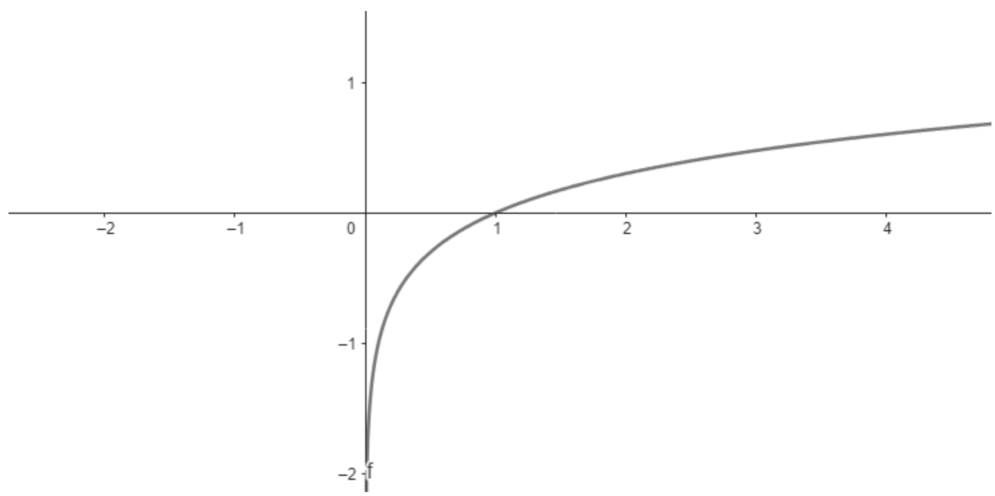


La gráfica de una función exponencial es una curva que crece exponencialmente si $a > 1$ (la curva sube cada vez más rápido) o decrece exponencialmente si $0 < a < 1$ (la curva baja cada vez más rápido). La forma específica de la curva depende del valor de la base a.

2.6.6 Funciones logarítmicas

la función logarítmica es fundamental para comprender relaciones inversas a las funciones exponenciales. Se define como la función inversa de la función exponencial de base a ($a > 0$ y $a \neq 1$), y se expresa como $\log_a(x)$, donde x es cualquier número real positivo ($x > 0$). La gráfica de una función logarítmica es la imagen especular de la gráfica de la función exponencial de la misma base. Es una curva que crece lentamente a medida que x aumenta. La forma específica de la curva depende del valor de la base a.

Figura 2.29: Gráfica de la función $f(x) = \ln(x)$

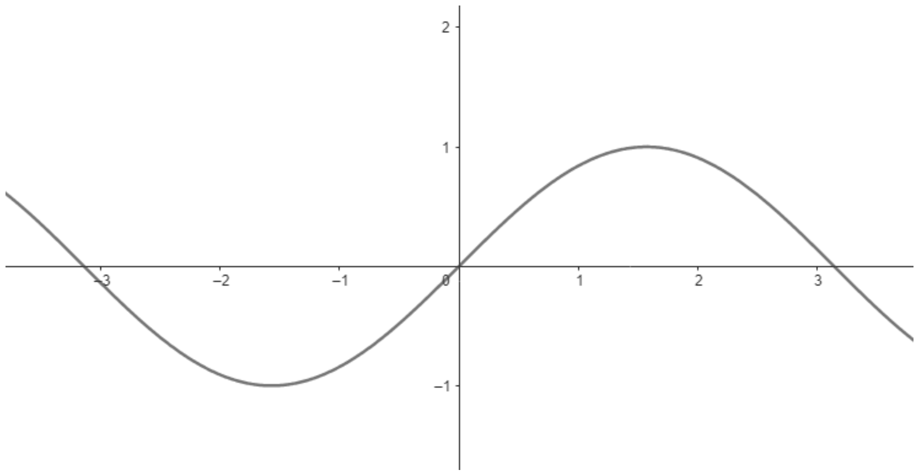


2.6.7 Funciones trigonométricas

las funciones trigonométricas sirven para describir las relaciones entre los lados y ángulos de los triángulos. Estas funciones se basan en la razón de dos catetos en un triángulo rectángulo, dando lugar a las funciones seno (sin), coseno (cos) y tangente (tan). Su importancia se extiende a diversos campos del conocimiento, desde la física y la ingeniería hasta la astronomía y la música.

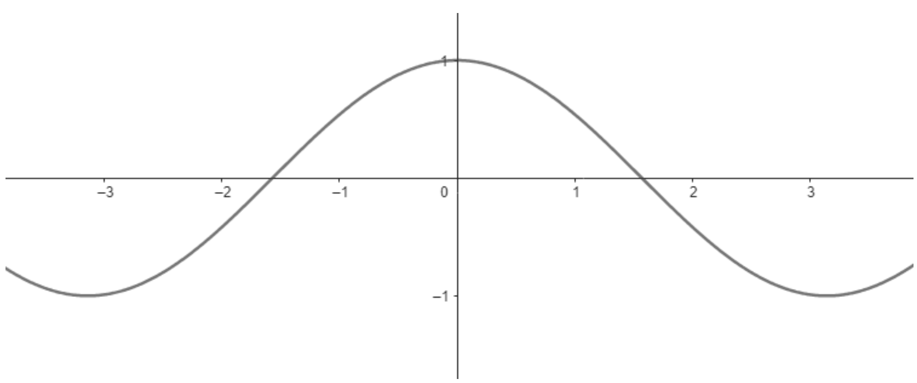
Función seno: Representa la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa. Su gráfica es una curva periódica que oscila entre -1 y 1.

Figura 2.30: Gráfica de la función $f(x) = \sin(x)$



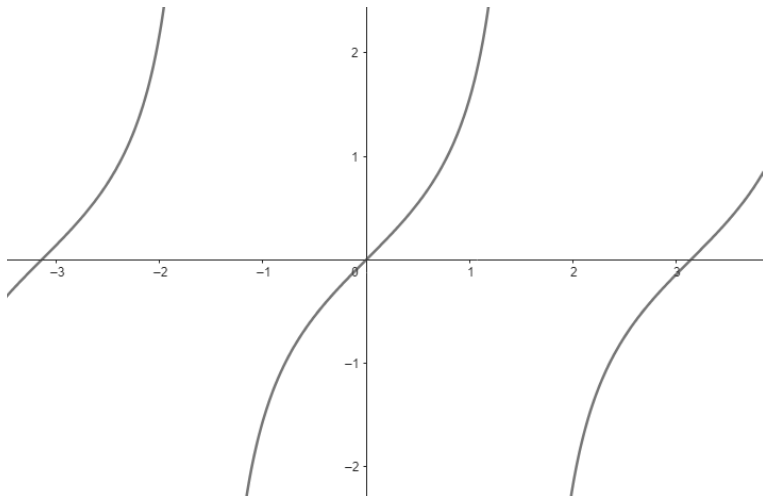
Función coseno: Representa la razón entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa. Su gráfica es una curva periódica que oscila entre -1 y 1.

Figura 2.31: Gráfica de la función $f(x) = \cos(x)$



Función tangente: Representa la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente. Su gráfica es una curva no periódica con asíntotas verticales en los múltiplos enteros de $\frac{\pi}{2}$.

Figura 2.32: Gráfica de la función $f(x) = \tan(x)$



Las funciones trigonométricas no se limitan a los triángulos rectángulos. Mediante la extensión de sus definiciones a ángulos generales, se obtiene un conjunto más amplio de funciones, como la cotangente (cot), la secante (sec) y la cosecante (csc). Estas funciones permiten analizar fenómenos como el movimiento pendular, las vibraciones y las ondas.

2.7 ¿Cómo determinar el dominio de una función real?

Determinar el dominio de una función define los valores válidos que puede tomar la variable independiente, para los cuales la función está definida. Este proceso es esencial para comprender las restricciones y limitaciones de la función, así como para evitar errores y malentendidos en su aplicación. Al establecer el dominio, se identifican los valores de entrada que producen resultados significativos y coherentes en la función, excluyendo aquellos que pueden llevar a comportamientos no deseados, como divisiones por cero o raíces cuadradas de números negativos. Esto es especialmente importante en contextos científicos y de ingeniería, donde las funciones modelan fenómenos reales y deben reflejar adecuadamente las condiciones del mundo físico.

N Recordemos que en los números reales

- $\sqrt{a}$ existe si $a \geq 0$
- $\log_b a$ existe si $a > 0$
- $\dfrac{b}{a}$ existe si $a \neq 0$

Para determinar el *dom* f, buscamos analíticamente y geométricamente los valores de x que hacen de f una regla bien definida.

Ejemplo 2.7

Describa y fundamente algebraica y geométricamente el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Solución

Buscamos los valores de x para los cuales $f(x)$ existe, esto es: por definición se tiene que $dom\ f := \{x \in \mathbb{R} \big/ f(x) \text{ existe } \}$

Es decir, $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \geq 0$

Para hallar los valores de x que satisfacen la desigualdad, usamos un método gráfico donde se verifica el signo de las expresiones $x - 1$ y $x + 1$ en la recta real, a través de números de prueba como se puede observar en la figura 2.33

Figura 2.33: Método gráfico para encontrar el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$-\infty$	-1	0	1 ∞
$x-1$ ----------------	---------------	---------------	+++++++++++
$x+1$ ----------------	+++++++++++	+++++++++++	+++++++++++
$(x-1)(x+1)$ ++++++	---------------	---------------	+++++++++++

Dividimos la recta real en intervalos generados por los factores de la expresión que define la función

$(x-1)(x+1) \geq 0$ si y solo si $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$$dom\ f := \{x \in \mathbb{R} \big/ (x-1)(x+1) \geq 0\} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

Figura 2.34: Representación gráfica del dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$-\infty$ *domf(x)*	-1	0	1 *domf(x)* ∞
++++++++++++++	---------------	---------------	+++++++++++

Para estar seguros de que el conjunto encontrado representa el dominio de la función es conveniente verificarlo sustituyendo en la función por algunos valores y constatar que la función está definida en esos valores.

$$\text{para } x = -2, \text{ se tiene que } f(-2) = \sqrt{(-2)^2 - 1} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

$$\text{para } x = 2, \text{ se tiene que } f(2) = \sqrt{(2)^2 - 1} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} \text{ existe}$$

Ejemplo 2.8

Describa y fundamente algebraica y geométricamente el dominio de la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)$

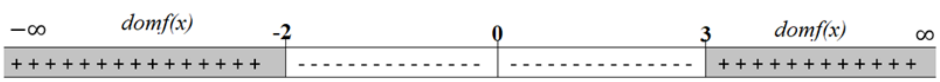
Solución
Buscamos los valores de x para los cuales $f(x)$ existe.
$dom\ f := \{x \in \mathbb{R} \big/ f(x) \text{ existe } \}$
Pero $f(x)$ existe si y solo si $\dfrac{x+2}{x-3} > 0$
gráficamente

Figura 2.35: Método gráfico para encontrar el dominio de $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)$

	$-\infty$ a -2	-2 a 0	0 a 3	3 a ∞
$x+2$	- - - - - - - - - - - - - - - -	+ + + + + + + + + + +	+ + + + + + + + + + +	+ + + + + + + + + + + +
$x-3$	- - - - - - - - - - - - - - - -	- - - - - - - - - - - - - - -	- - - - - - - - - - - - - - -	+ + + + + + + + + + + +
$\frac{x+2}{x-3}$	+ + + + + + + + + + + + + +	- - - - - - - - - - - - - - -	- - - - - - - - - - - - - - -	+ + + + + + + + + + + +

$$dom\ f := \left\{x \in \mathbb{R} \Big/ \frac{x+2}{x-3} > 0\right\} = (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$$

Figura 2.36: Representación gráfica del dominio de $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)$



Para estar seguros de que el conjunto encontrado representa el dominio de la función es conveniente verificarlo sustituyendo en la función por algunos valores y constatar de que la función está definidia en esos valores.

Verificamos $f(-3) = \ln\left(\dfrac{-3+2}{-3-3}\right) = \ln\left(\dfrac{-1}{-6}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{6}\right)$ existe

2.8 Funciones como modelos matemáticos

Las funciones desempeñan un papel fundamental en la modelación de una amplia gama de situaciones concretas en diversas disciplinas científicas y de ingeniería. Al representar relaciones matemáticas entre variables, las funciones permiten capturar y predecir comportamientos complejos en sistemas naturales y artificiales.

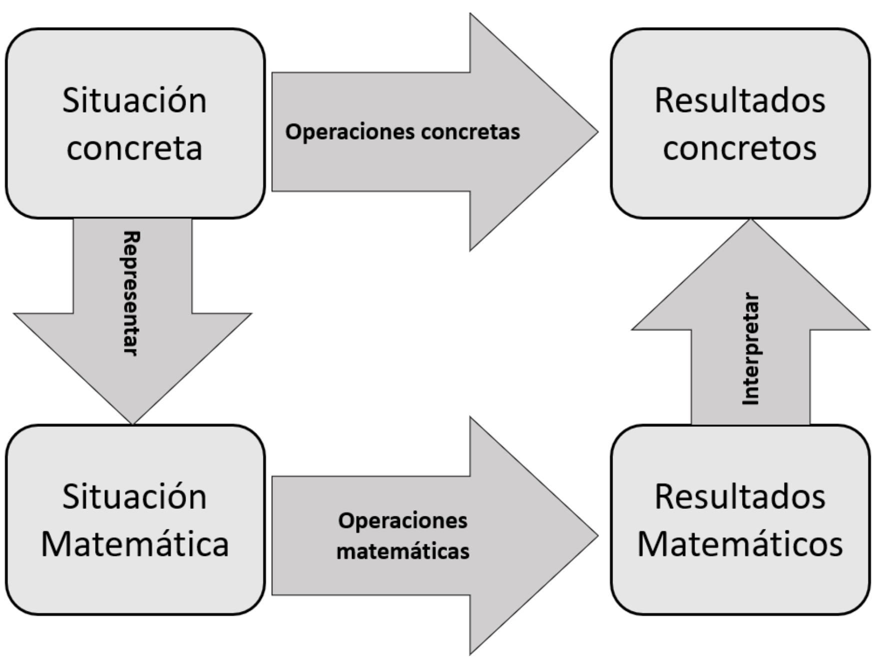
El uso de funciones como modelos matemáticos en la solución de problemas reales o idealizados implica procesos de representación e interpretación, para ello es importante tener en cuenta lo siguiente.

Proceso de representación: Esto implica el cambio de registro de representación de la situación, el cual puede ser gestual, pictórico, gráfico, numérico o algebraico. Aquí se establecen las relaciones matemáticas entre las variables identificadas. Esto puede incluir ecuaciones, funciones, o sistemas de ecuaciones que describen cómo las variables interactúan entre sí.

Proceso de resolución: Una vez representada la situación, se procede a resolverlo matemáticamente para obtener soluciones matemáticas del problema o situación tratada.

Proceso de interpretación de los resultados: Finalmente, se interpretan los resultados del modelo en el contexto del problema original, extrayendo conclusiones y obteniendo información útil para tomar decisiones o realizar predicciones sobre el fenómeno estudiado. Esto implica validar y hacer ajustes del modelo: Es importante validar el modelo comparando sus predicciones con datos reales o con resultados de experimentos. Si es necesario, el modelo puede ajustarse o refinarse para mejorar su precisión y capacidad predictiva. Los ajustes pueden implicar regresar al inicio para redefinir el modelo

Figura 2.37: Proceso de solución de problemas usando funciones como modelos matemáticos



Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 2.9

Se desea construir una ventana en forma de rectángulo coronado por un semicírculo, con un perímetro de 5 mts. Encuentre una función que represente la cantidad de luz que pasa por la venta.

Solución

Se busca una expresión que represente la relación que existe entre el área de la superficie por donde pasa la luz en función de la variable que representa la longitud de la base de la ventana. Para ello conviene seguir los pasos que se muestran en la figura 2.37.

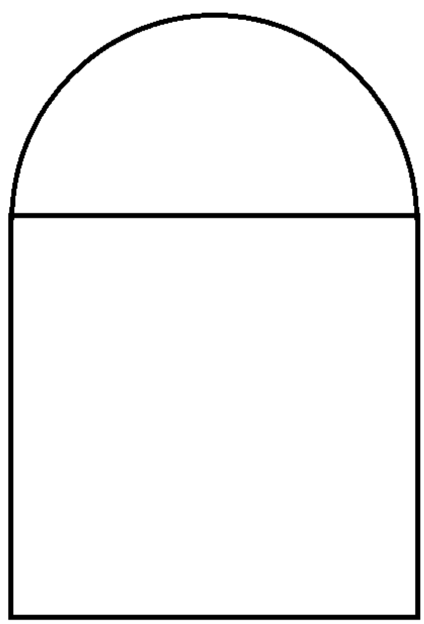
N A continuación se presentan algunas recomendaciones para el proceso de modelación o representación de este tipo de situaciones.

1. Hacer un esquema o ilustración de la situación siempre que sea posible.
2. Asignar variables a datos desconocidos.
3. Buscar en el problema información que relacione las variables.
4. Expresar la relación entre las variables una en función de otra.

Los pasos anteriores hacen parte del proceso de representación de la situación concreta a una situación matemática.

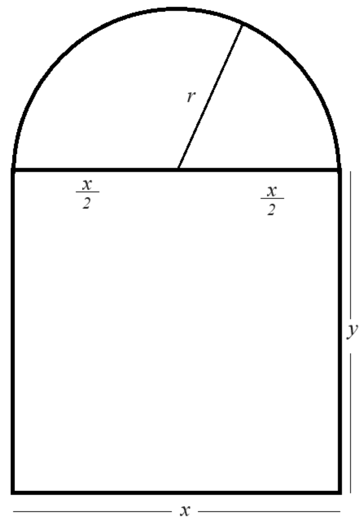
1. Hacemos un esquema

Figura 2.38: Ilustración de la situación, ventana



2. Asignamos variables
   Sea $x :=$ largo (base), $y :=$ alto, $r :=$ radio del semícirculo superior

Figura 2.39: Representación de la situación y sus variables



3. Buscamos relación entre las variables
   El perímetro de la ventana es

$$p = x + 2y + \pi r$$

Pero $p = 5$, luego $5 = x + 2y + \pi r$, ahora $r = \dfrac{x}{2}$, luego

$$x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 5 \tag{2.2}$$

Además el área es:

$$A = xy + \frac{\pi r^2}{2} = xy + \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}$$

$$A = xy + \frac{\pi x^2}{8} \tag{2.3}$$

Despejamos y en la ecuación (2.2)

$$\begin{aligned} x + 2y + \frac{\pi x}{2} &= 5 \\ 2y &= 5 - x - \frac{\pi x}{2} \\ y &= \frac{5}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4} \\ y &= \frac{1}{2}\left(5 - x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Reemplazamos en la ecuación (2.3) y tenemos

$$
\begin{aligned}
A &= xy + \frac{1}{8}\pi x^2 \\
A(x) &= x\left(\frac{1}{2}\left(5 - x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\right)\right) + \frac{\pi x^2}{8}
\end{aligned}
$$

Efectuando los productos

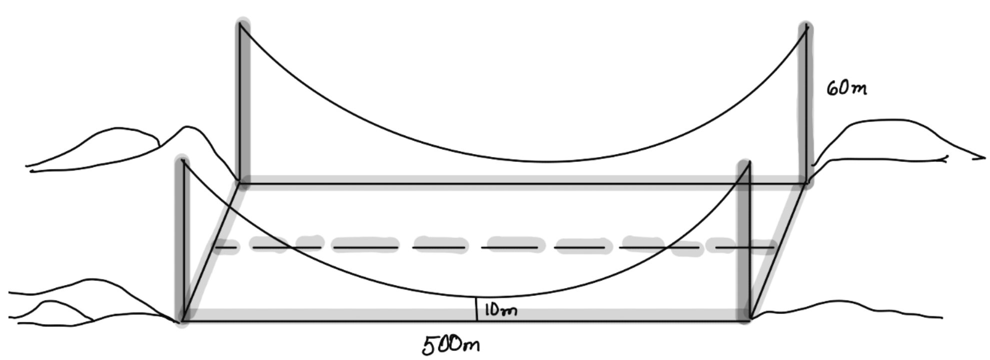
$$
\begin{aligned}
A(x) &= \frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi x^2}{8} \\
A(x) &= \frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x^2}{8} \\
A(x) &= \frac{1}{2}\left(5x - x^2 - \frac{\pi x^2}{4}\right) \\
A(x) &= \frac{1}{2}\left(5x - x^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Es la función que representa el área de la ventana en función de la base.

Ejemplo 2.10

Un puente colgante tiene 500 mts de longitud y un par de columnas de 60 mts de alto a través de una cuerda en forma de arco parabólico de altura mínima 10 mts como se muestra en la figura. Hallar la longitud de un cable de suspensión situado a 50 mts del centro del puente

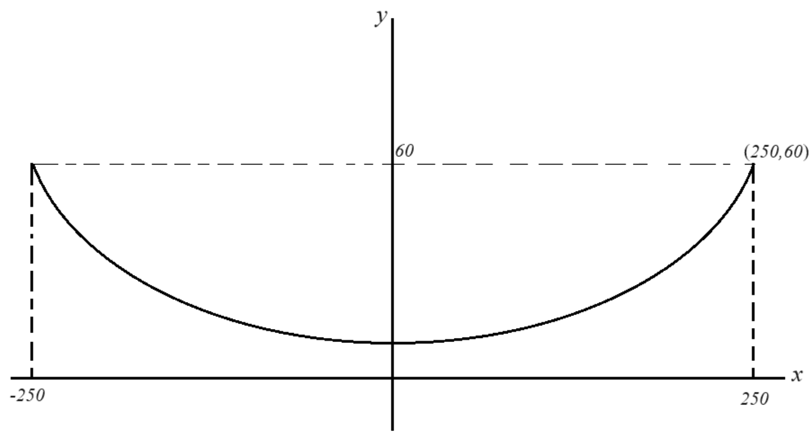
Figura 2.40: Ilustración de la situación, puente colgante



Solución

Representamos la situación matemáticamente

Figura 2.41: Representación en el plano cartesiano de la situación y sus variables



El problema se traduce a calcular la ordenada del punto $(50, y)$ que está sobre la parábola cuyo vértice es $(0, 0)$ que pasa por los puntos $(250, 60)$ $(-250, 60)$

Por definición, sabemos que la parábola sobre el eje y con vértice (h, k) tiene por ecuación: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, pero $h = 0, k = 10$ con lo que:

$$\begin{aligned}(x-0)^2 &= 4p(y-10)\\ x^2 &= 4p(y-10)\end{aligned}$$

Debemos hallar p, usamos el punto $(250, 60)$ que está en la parábola.

$$\begin{aligned}250^2 &= 4p(60-10) \Leftrightarrow 250^2 = 200p\\ p &= \frac{250^2}{200} \Rightarrow p = \frac{625}{2}\end{aligned}$$

Con eso, $x^2 = 4p(y-10)$ reemplazando p

$$x^2 = 4\left(\frac{625}{2}(y-10)\right) = 1250(y-10)$$

$$\frac{x^2}{1250} = y - 10 \Leftrightarrow y = 10 + \frac{x^2}{1250}$$

Ahora para $x = 50$ tenemos

$$y = 10 + \frac{50^2}{1250} = 10 + \frac{2500}{1250}$$

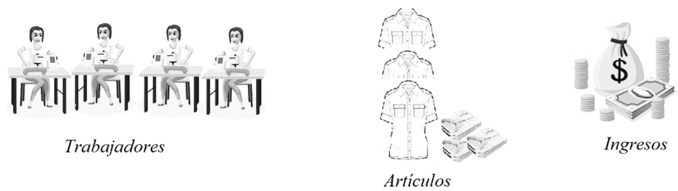
$$y = 10 + 2 = 12$$

La longitud del cable a está a 50 metros del centro es $y = 12$ metros

2.9 Funciones compuestas

Pensemos un poco en la situación que se ilustra en la figura 2.42

Figura 2.42: Ilustración de relaciones compuestas



Supongamos que la cantidad de artículos que se producen y venden en una empresa manufacturera depende del número de trabajadores en el área de producción y que los ingresos dependen de la cantidad de artículos producidos y vendidos, es posible conjeturar que los ingresos de la empresa dependen de la cantidad de artículos producidos y vendidos. Esto es, si escribimos $x =$ cantidad de trabajadores en el área de producción, $y =$ cantidad de artículos producidos y vendidos, $z =$ ingresos por ventas, entonces, $y = g(x)$, y $z = f(y)$ por lo tanto, $z = f(g(x)) = h(x)$ a este tipo de relaciones las llamaremos funciones compuestas.

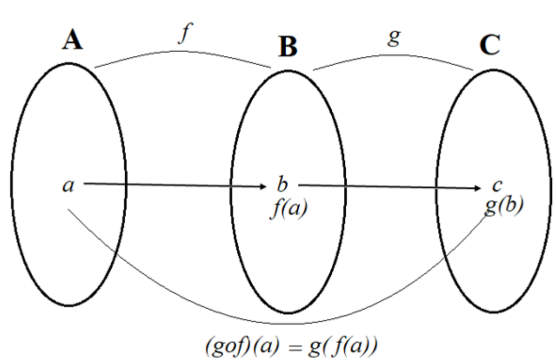
Definición 2.2

$$\text{Sean } g : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R} \qquad f : B \subset \mathbb{R} \to C \subset \mathbb{R}$$
$$x \to y = g(x) \qquad y \to z = f(y)$$

Se define la composición de la función f con la función g como:

$$f : A \subset \mathbb{R} \to C \subset \mathbb{R}$$
$$x \to z = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

Figura 2.43: Ilustración composición de funciones



N Note que para que $f \circ g$ exista, el dominio de g debe ser el rango o recorrido de f, eso implica que, $f \circ g$ en general es diferente de $g \circ f$, en pocas palabras existen casos donde $f \circ g$ está definida, sin embargo, $g \circ f$ no lo está.

Para calcular $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, sustituimos x en f por $g(x)$, y se obtiene $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, es decir, f evaluada en $g(x)$.

Ejemplo 2.11

Sea $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, calcule $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

Solución

Por definición

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)^2+1} = \sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2+1} = \sqrt{x+1}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt[4]{x^2+1}$$

N El ejemplo anterior, es una muestra que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$, es decir, la composición de funciones no es conmutativa. Sin embargo, si $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ entonces $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x}$ y $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x}$.

Esto es: $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

Es decir, no se puede decir que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ para toda función f y g, pero tampoco se puede asegurar que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$, para toda función f y g

2.10 Inversa de una función

Consideremos las siguientes funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln(x)$

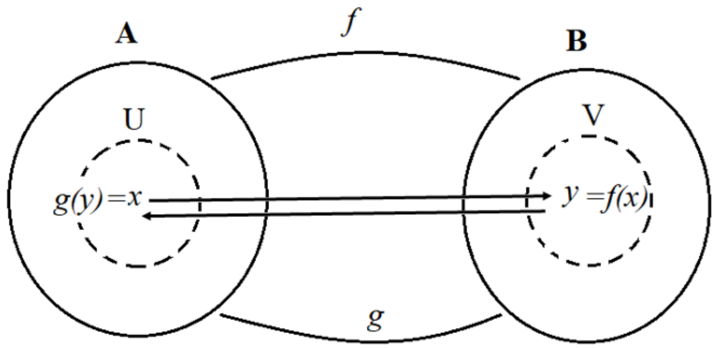
Note que: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{g(x)} = e^{\ln(x)} = x$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln(f(x)) = ln(e^x) = x$$

Además: $dom\, f = \mathbb{R}$ y $ran\, f = \mathbb{R}^+$; además $dom\, g = \mathbb{R}^+$ y $ran\, g = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\to f(x) = e^x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\to g(x) = \ln(x) \end{aligned}$$

Figura 2.44: Ilustración inversa de una función



N Note que el dominio de f es igual al rango de $g = f^{-1}$ y el dominio de f^{-1} es igual al rango de f esto es

$$dom\, f = ran\, f^{-1}$$
$$ran\, f = dom\, f^{-1}$$

Para que la inversa de una función exista, esta debe ser biyectiva en todo su dominio, lo que significa que es tanto inyectiva (cada elemento del dominio tiene una única imagen en el codominio) como sobreyectiva (cada elemento del codominio tiene al menos una preimagen en el dominio) a esta se le conoce como inversa global.

En ocasiones podemos restringir la función a un intervalo más pequeño alrededor de un punto x=a de su dominio en donde la función es biyectiva y encontrar una inversa de la función para esa restricción, a estas funciones se les denomina inversas locales. Es importante aclarar que no todas las funciones tienen inversa global, sin embargo, pueden tener inversa local.

Ejemplo **2.12**

Determinar y fundamentar la inversa de la función $f(x) = x^2 + 4x + 8$ si existe, ¿cuál es el dominio de f?

Solución

Si $f^{-1}(x)$ existe entonces cumple que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

1. Hacer $y = f(x)$
   $y = x^2 + 4x + 8$

2. Despejar x en términos de y

$$
\begin{aligned}
&y = x^2 + 4x + 8 \\
&y = x^2 + 4x + 4 + 8 - 4 \\
&y = (x+2)^2 + 4 \Rightarrow y - 4 = (x+2)^2 \\
\\
&\sqrt{y-4} = x + 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y-4} - 2
\end{aligned}
$$

3. Reemplazar y por x en la expresión y definir $f^1(x)$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-4} - 2$$

4. Verificamos

$$
\begin{aligned}
(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) &= f^{-1}(x)^2 + 4f^{-1}(x) + 8 \\
&= (\sqrt{x-4} - 2)^2 + 4(\sqrt{x-4} - 2) + 8 \\
&= (\sqrt{x-4})^2 - 4\sqrt{x-4} + 4 + 4\sqrt{x-4} - 8 + 8 \\
&= x - 4 + 4 = x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) &= \sqrt{f(x) - 4} - 2 = \sqrt{x^2 + 4x + 8 - 4} - 2 \\
&= \sqrt{x^2 + 4x + 4} - 2 = \sqrt{(x+2)^2} - 2 \\
&= x + 2 - 2 = x
\end{aligned}
$$

Analizar y fundamentar, ¿el procedimiento anterior garantiza que f^{-1} es una inversa local o global de f?.

Figura 2.45: Rúbrica de evaluación del aprendizaje: Formula y resuelve situaciones del contexto cotidiano, de las matemáticas o de las otras ciencias, que involucran relaciones entre dos variables que se pueden modelar numérica, gráfica o algebraicamente

Criterio	Mínimo	Satisfactorio	Superior
Resolución de problemas	Comprende algunos aspectos de la situación por lo que logra encontrar una solución parcial o particular a problemas que involucran relaciones entre dos variables que se pueden modelar numéricamente, gráficamente o algebraicamente.	Comprende la situación, formula y ejecuta soluciones correctas para problemas comunes o casos particulares, aunque puede tener dificultades con situaciones no cotidianas que involucran relaciones entre dos variables que se pueden modelar numéricamente, gráficamente o algebraicamente.	Comprende y formula problemas con precisión en situaciones tanto cotidianas como no cotidianas. Encuentra y justifica soluciones óptimas y creativas para todo tipo de situaciones afines con relaciones entre dos variables que se pueden modelar numéricamente, gráficamente o algebraicamente
Comprensión conceptual	Muestra una comprensión superficial de relaciones entre dos variables que se pueden modelar numéricamente, gráficamente o algebraicamente, los utiliza para justificar o argumentar ideas, pero de manera limitada.	Comprende y utiliza adecuadamente relaciones entre dos variables que se pueden modelar numéricamente, gráficamente o algebraicamente en situaciones cotidianas o simples.	Demuestra una comprensión robusta y detallada de relaciones entre dos variables que se pueden modelar numéricamente, gráficamente o algebraicamente y las utiliza correctamente en contextos variados y complejos.
Análisis y desarrollo de procedimientos	Desarrolla procedimientos básicos, o rutinarios en la solución de situaciones sencillas o cotidianas. Carece de un análisis detallado de los pasos a seguir.	Desarrolla procedimientos correctos y coherentes para situaciones comunes y cotidianas. Realiza un análisis adecuado del procedimiento utilizado para la solución de un problema o ejercicio.	Desarrolla procedimientos detallados y precisos para todo tipo de situaciones y realiza un análisis exhaustivo y lógico de los pasos a seguir y detecta errores en procedimientos realizados.
Uso del lenguaje matemático	Utiliza el lenguaje cotidiano para comunicar las ideas y justificar procedimientos y eventualmente usa términos y expresiones propias del lenguaje matemático.	Utiliza el lenguaje matemático de manera correcta y clara en la mayoría de las situaciones, usa terminología y expresiones adecuadas a la situación o al contexto	Utiliza el lenguaje matemático con precisión y claridad en todas las situaciones y comunica ideas complejas de manera efectiva haciendo uso apropiado del lenguaje matemático en cualquier contexto.

Fuente: Elaboración propia.

2.11 Guía de trabajo 2

1. Describir y fundamentar la relación entre las variables x e y para que la distancia del punto (x, y) al punto $(2, 1)$ sea igual a 5. ¿Es esta una relación funcional de la variable y respecto a la variable x? argumente su respuesta, represente gráficamente dicha relación.

2. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \dfrac{x^2+5x-14}{2x-8}$, describir y fundamentar gráfica y analíticamente el dominio de $f(g(x))$.

3. Dadas las funciones $f(x) = \ln(x)$ y $g(x = \dfrac{x^2-4}{x^2+4x+3}$, describir y fundamentar gráfica y analíticamente el dominio de $f(g(x))$.

4. Un segmento AB se mueve de tal forma que A está siempre sobre el eje y, y B está siempre sobre el eje x. Describir y fundamentar una relación entre x e y sabiendo que el punto (x, y) se encuentra sobre AB y está situado a una distancia de 6 unidades del punto B.

5. La relación entre las variables x e y se puede representar por la función, $g(x) = \dfrac{4-6x}{x}$, diga para qué valores de x tiene sentido la relación y si es posible encontrar una relación explícita de x en términos de y, represéntela gráficamente y diga para qué valores de y dicha relación tiene sentido. ¿Qué representa esta relación? Fundamentar

6. La relación entre las variables x e y se puede representar por la función, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$, diga para que valores de x tiene sentido la relación y si es posible encontrar una relación explicita de x en términos de y, represéntela gráficamente y diga para que valores de y dicha relación tiene sentido. ¿Qué representa esta relación? Fundamentar

7. En cierto país los gastos federales anuales en el sistema de salud, en miles de millones de dólares aumentaron en forma lineal, desde 50 en 1973, hasta 155 en 1994. Describir y fundamentar una relación que exprese los gastos anuales por concepto de salud y determine cuáles serán los gastos para el año 2022. ¿Tienen sentido estos gastos? Fundamente su respuesta. Represente gráficamente la relación y explique qué indican el dominio y el rango de dicha relación.

8. Un túnel construido para atravesar una montaña que tiene forma de parábola de altura 7m y de ancho 12 metros, encuentre una función que nos ayude a determinar si es permitido el paso de un camión cuya altura es 5m y ancho 4m. suponiendo que pasa por uno de los carriles y que la carretera tiene un separador de 2m

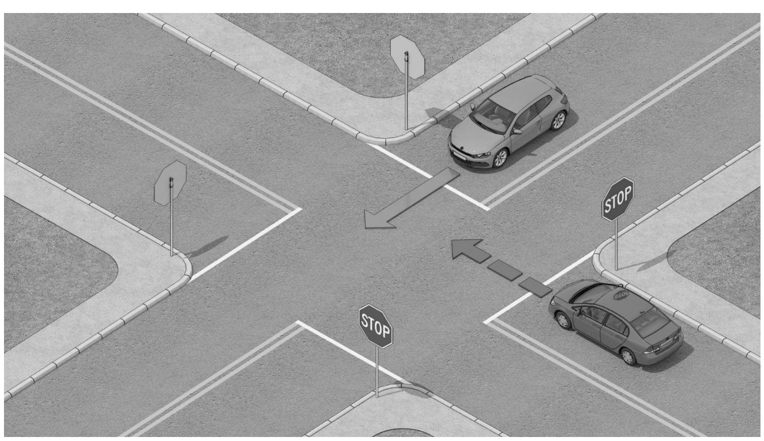
9. Suponga que el agua que sale por una tubería horizontal que está a 25m por encima de la superficie del suelo describe una parábola, siendo el vértice el extremo del tubo, si 8m por debajo del tubo el agua se ha curvado 10m hacia fuera tomando como referencia una vertical que pasa por el extremo del tubo. Describir y fundamentar una expresión algebraica que exprese la relación entre la altura y la distancia horizontal del agua a la línea vertical del tubo al piso y úsela para hallar la distancia de la línea vertical a la cual el agua tocará el piso. Represente gráficamente la relación.

10. Para construir una pista de atletismo para carreras de los 400m planos que tenga forma de rectángulo coronado por dos semicírculos usando placas de concreto que deben tener 30cm de espesor. Describir y fundamentar un modelo matemático que exprese la cantidad de concreto a utilizar en términos del ancho de la pista.

3 Límites

Existen diversos fenómenos que muestran relaciones entre una variable dependiente y una independiente, por ejemplo, la altura de una planta semanas después de su germinación, los gastos de producción en relación con el número de artículos producidos, la distancia recorrida por un objeto en un movimiento uniformemente acelerado, etc. También es común analizar en este tipo de situaciones ¿qué ocurre con la variable dependiente cuando la variable independiente se acerca a un valor fijo tanto como sea posible?. Es aquí donde el concepto de límites de funciones de una variable juega un papel fundamental en el estudio de estas situaciones, en esta sección se aborda este concepto iniciando con ejemplos prácticos y cotidianos, hasta llegar a una definición formal y de esa manera consolidar las bases para dominar las herramientas del cálculo diferencial.

Figura 3.1: Ilustración límite de velocidad cero



Resultado de aprendizaje

Describir comportamientos de las funciones, como la continuidad, asíntotas horizontales y verticales y resolver problemas prácticos que involucren aproximaciones, a través de la aplicación del concepto de límite de funciones de una variable.

Activación de saberes previos

Imagínate que un auto va por una autopista donde hay un letrero que indica la velocidad máxima permitida: 80 km/h.

Fundamentar. ¿Qué variables están relacionadas en la situación? ¿Cuáles podrían ser sus valores?

Describir ¿Qué crees que sucede con la velocidad del vehículo a medida que se acerca al letrero?

Ahora imagina que el vehículo se acerca a un semáforo en rojo. Describir ¿Qué crees que sucede con la velocidad del vehículo a medida que se acerca al letrero? Ilustra gráficamente y numéricamente la situación.

Esta idea de acercarse a un valor sin llegar a alcanzarlo es precisamente la esencia del concepto de límite.

Analicemos la siguiente situación.

La siguiente figura muestra los valores de la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ alrededor de $x = 2$.

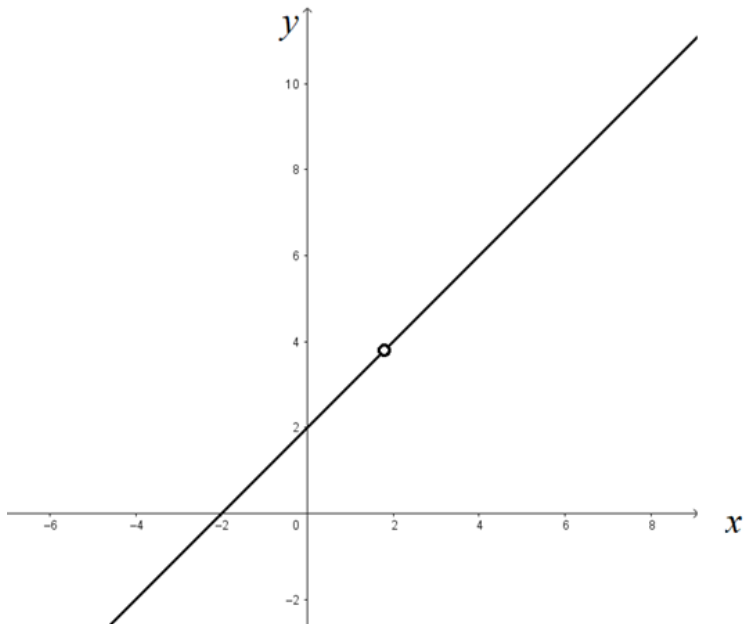
Figura 3.2: Comportamiento de la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ alrededor de $x = 2$

x	$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$
0	$f(x) = \dfrac{0^2-4}{0-2} = 2$
1	$f(1) = \dfrac{1^2-4}{1-2} = 3$
1.5	$f(1.5) = \dfrac{1.5^2-4}{1.5-2} = 3.5$
1.75	$f(1.75) = \dfrac{1.75^2-4}{1.75-2} = 3.75$
1.9	$f(1.9) = \dfrac{1.9^2-4}{1.9-2} = 3.9$
1.999	$f(1.999) = \dfrac{1.999^2-4}{1.999-2} = 3.999$
2	**4**
2.0001	$f(2.001) = \dfrac{2.0001^2-4}{2.0001-2} = 4.0001$
2.1	$f(2.1) = \dfrac{2.1^2-4}{2.1-2} = 4.1$
2.25	$f(2.25) = \dfrac{2.25^2-4}{2.25-2} = 4.25$
2.5	$f(2.5) = \dfrac{2.5^2-4}{2.5-2} = 4.5$
3	$f(3) = \dfrac{3^2-4}{3-2} = 5$
4	$f(4) = \dfrac{4^2-4}{4-2} = 6$

Note que, cuando la variable independiente x toma valores cercanos a 2 la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ toma valores cercanos a 4, sin importar que x nunca es igual a 2, ni que $f(x)$ nunca es igual a 4, es decir, si x se acerca a 2, entonces $f(x)$ se acerca a 4. Simbólicamente escribimos, $f(x) \to 2$ cuando $x \to 4$ y se lee $f(x)$ tiende a 2 cuando x tiende a 4. O lo que es lo mismo $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$

Gráficamente es lo siguiente,

Figura 3.3: Comportamiento de la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ alrededor de $x = 2$



A medida que x tiende a 2 por la derecha o por la izquierda $f(x)$ tiende a 4, esto significa que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

Ahora describe en la siguiente tabla lo que ocurre con los valores de $g(x) = x+2$ cuando x toma valores cercanos a 2.

Diligencia la siguiente tabla y muestra tus conclusiones.

x	$g(x) = x + 2$
0	
1	
1.5	
1.75	
1.9	
1.999	
2	
2.0001	
2.1	
2.25	
3	
4	

Describir y fundamentar. ¿Qué diferencias o semejanzas observas con los valores de la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$? ¿Qué se puede decir a cerca de $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$?

Ejemplo 3.1

Considere la siguiente función $f(x) = \dfrac{2x^2+x-3}{x-1}$

Solución

Note que el dominio de f viene dado por $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Además se observa que $f(1)$ no existe. Al analizar cuál es el comportamiento de los valores de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1, se obtiene

Valores $x < 1$

x	$f(x)$
0	4
0,5	4,5
0,75	4,75
0,9	4,9
0,99	4,99
0,999	4,999

Valores $x > 1$

x	$f(x)$
2	6
1,5	5,5
1,25	5,25
1,1	5,1
1,01	5,01
1,0001	5,0001

Se observa en las tablas que cuanto más se acerca x a 1 (ya sea por la izquierda o por la derecha de 1), más cerca está $f(x)$ de 5. Este comportamiento de f se expresa como **el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 es 5** y se denota $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$

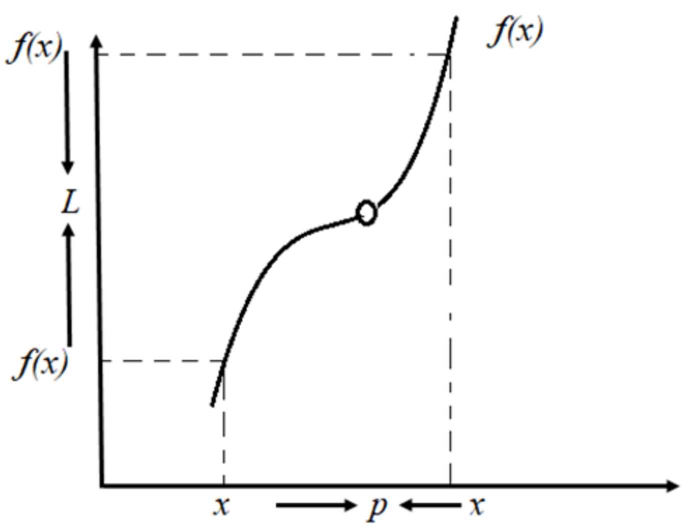
¿Existe alguna relación entre $f(x)$ y $g(x)$? describirla y fundamentarla

3.1 Construcción del concepto de límite

Intuitivamente entendemos por límite de una función, como el valor al cual se acerca la función cuando la variable independiente se acerca a un punto fijo, tanto como sea posible.

Entonces, si $f(x)$ se acerca a L, cuando x se acerca a p, se entiende que $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$, veamos la situación gráficamente.

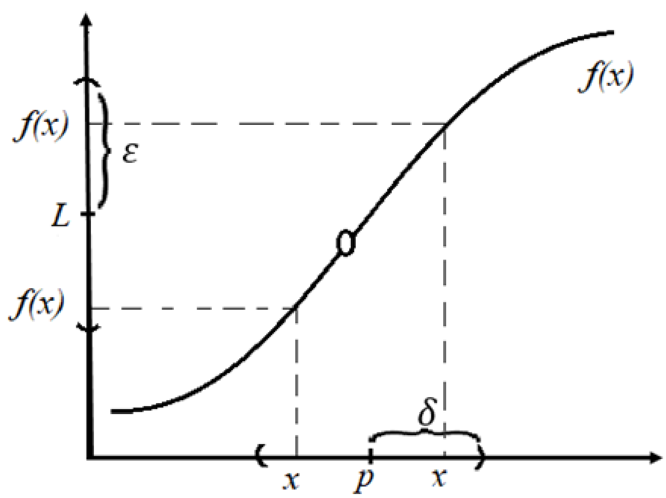
Figura 3.4: Ilustración idea intuitiva de límite de una función.



Si definimos radios de intervalos $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, vemos que $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$, si ocurre que, dado $\epsilon > 0$ es posible encontrar $\delta > 0$ tal que, siempre que $x \in (p - \delta, p + \delta)$ entonces $f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$, pero $x \in (p - \delta, p + \delta) \Leftrightarrow |x - p| < \delta$ y $f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon) \Leftrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$, en pocas palabras.

$\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$ si y solo si, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que depende de ϵ) tal que si, $|x - p| < \delta$, entonces, $|f(x) - L| < \epsilon$. Esto se conoce como definición formal de límite de una función real de una variable real.

Figura 3.5: Ilustración de la definición formal de límite.



N Estrategia para el cálculo de límites.

Si f y g son dos funciones definidas en un intervalo abierto que contiene a p y si $f(x) = g(x)$ para todo x del intervalo con x distinto de p, además g está definida en p, es decir $g(p)$ existe, entonces $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \lim\limits_{x \to p} g(x) = g(p)$

Por ejemplo, las funciones $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$ y $g(x) = 2x + 3$ coinciden para todo $x \neq 1$, es decir $f(x) = g(x)$ para $x \neq 1$, además $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = 5$ y $g(1) = 2(1) + 3 = 5$, esto es

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(2x + 3) = 2(1) + 3 = 5$$

Lo anterior sugiere que, si se logra transformar adecuadamente la función dada en otra que sea equivalente a ella (salvo en el valor p dado) y si la función nueva tiene un límite determinado en p, entonces: este es también el límite de la función original. Esto proporciona una estrategia para el cálculo de límites.

Ejemplo 3.2

Describir y fundamentar el valor del límite $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

Solución

Note que $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ no está definida en $x = 4$, por lo que se procede a buscar una función equivalente con f pero que esté definida en $x = 4$.

A pesar de que no es posible proporcionar una receta para el cálculo de límites, la claridad que se tenga acerca de identidades algebraicas y trigonométricas resultan útiles en el proceso, por ejemplo, aquí lo conveniente es racionalizar el numerador para eliminar la indeterminación; para ello se multiplica tanto el numerador como el denominador por la expresión $\sqrt{x}+2$, como sigue.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} &= \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4+2} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3

Describir y fundamentar el valor del límite $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{6+x}-x}{3-x}$

Solución

Note que $f(x) = \dfrac{\sqrt{6+x}-x}{3-x}$ no está definida en $x = 3$, por lo que se procede a buscar una función equivalente con f pero que esté definida en $x = 3$. Para ello se procede como en el ejemplo anterior pero racionalizando en el numerador, es decir, se multiplica y se divide por la conjugada de la expresión en el numerador.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{6+x}-x}{3-x} &= \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{6+x}-x)(\sqrt{6+x}+x)}{(3-x)(\sqrt{6+x}+x)} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{6+x+x^2}{(3-x)(\sqrt{6+x}+x)} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{2+x}{\sqrt{6+x}+x} = \lim_{x\to 3} \frac{2+3}{\sqrt{6+3}+3} = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.4

Describir y fundamentar el valor del límite $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}$

Solución

Note que $f(x) = \dfrac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}$ no está definida en $x=-1$, por lo que se procede a buscar una función equivalente con f pero que esté definida en $x = 1$. Aquí nuevamente se racionaliza el numerador.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{5+x}-2}{x+1} &= \lim_{x\to -1} \frac{(\sqrt{5+x}-2)(\sqrt{5+x}+2)}{(x+1)(\sqrt{5+x}+2)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{x+5-4}{(x+1)(\sqrt{5+x}+2)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{5+x}+2)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{1}{\sqrt{5+x}+2} = \frac{1}{\sqrt{-1+5}+2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.5

Describir y fundamentar el valor del límite $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{2x+7}-1}$

Solución

Note que $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{2x+7}-1}$ no está definida en $x=-3$, por lo que se procede a buscar una función equivalente con f pero que esté definida en $x=-3$.

Aquí lo conveniente es racionalizar el numerador y el denominador para eliminar la indeterminación, como sigue.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{2x+7}-1} &= \lim_{x\to -3} \frac{(\sqrt{x+4}-1)(\sqrt{x+4}+1)(\sqrt{2x+7}+1)}{(\sqrt{2x+7}-1)(\sqrt{2x+7}+1)(\sqrt{x+4}+1)} \\
&= \lim_{x\to -3} \frac{(x+4-1)(\sqrt{2x+7}+1)}{(\sqrt{x+4}+1)(2x+7-1)} \\
&= \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(\sqrt{2x+7}+1)}{2(x+3)(\sqrt{x+4}+1)} \\
&= \lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{2x+7}+1}{2(\sqrt{x+4}+1)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

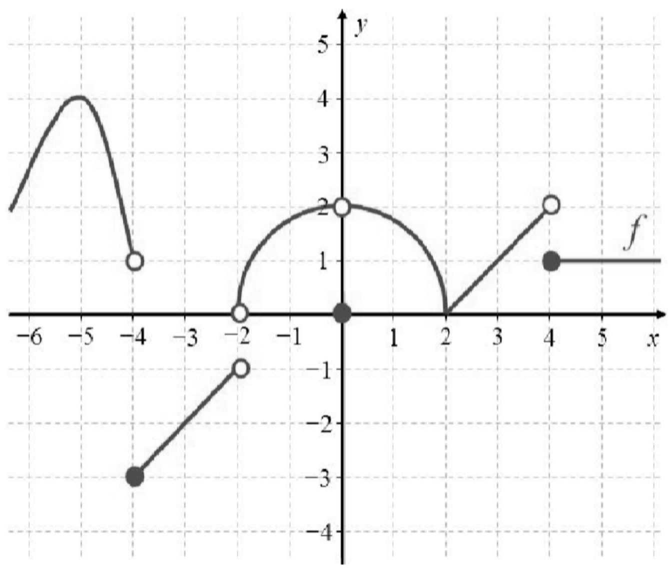
Ejemplo 3.6

Describir y fundamentar el valor del límite $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{\sqrt{6+x} - 2}$

3.2 Límites laterales

Sea f la función cuya gráfica se muestra a continuación

Figura 3.6: Representación gráfica de límites laterales



En la figura 3.6 cuando x se acerca a -4 por la izquierda ($x \to -4^-$) se tiene que $f(x)$ se acerca a 1 y cuando x se acerca a -4 por la derecha ($x \to -4^+$) $f(x)$ se acerca a -3, esto indica que $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$ no existe.

$x \to -4^-$ significa x **tiende a -4 por la izquierda**

$x \to -4^+$ significa x **tiende a -4 por la derecha**

De acuerdo con la figura 3.6 describe y fundamenta $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

En general,

1. Se escribe $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ si $f(x)$ se puede acercar a L tanto como uno quiera, tomando x suficientemente cercano al número a pero con $x < a$.
2. Se escribe $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ si $f(x)$ se puede acercar a L tanto como uno quiera, tomando x suficientemente cercano al número a pero con $x > a$.

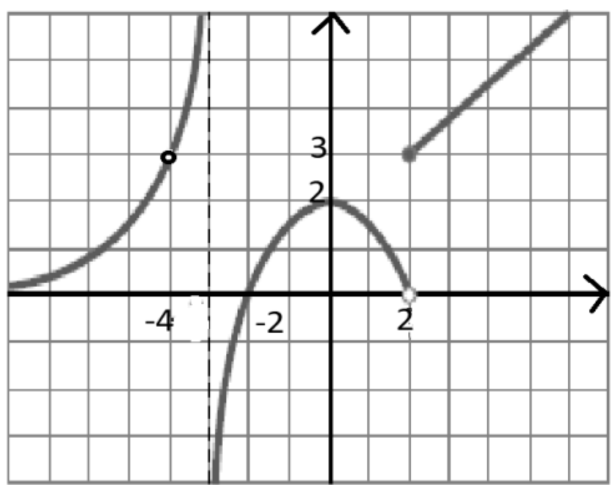
Teorema 3.1

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

Ejemplo 3.7

Considere la función cuya gráfica se presenta a continuación

Figura 3.7: Ilustración gráfica de límite lateral



Note que $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = 3$ por tanto $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 3$

De acuerdo con la figura 3.12 describe y fundamenta $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Teorema 3.2

Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existen y sea c una constante. Entonces:

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to a}[c\, f(x)] = c\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$
3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$
4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$, $n = 2, 3, \cdots$
6. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$, $n = 2, 3, \cdots$

Ejemplo 1

Determinar $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} + \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} - \dfrac{3x}{x+1}\right)$

Solución: Se aplica la propiedad 1 y se resuelven los límites resultantes.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} + \frac{x^2-2x+1}{x-1} - \frac{3x}{x+1}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} + \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1} - \lim_{x\to 1}\frac{3x}{x+1} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} + \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x-1} - \lim_{x\to 1}\frac{3x}{x+1} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} + \lim_{x\to 1} x-1 - \lim_{x\to 1}\frac{3x}{x+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1}+1} + (1-1) - \frac{3(1)}{1+1} = \frac{1}{2} + 0 - \frac{3}{2} = -1
\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Determinar $\lim\limits_{x\to 2} 5\left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$

Solución: Se aplica la propiedad 2 y se resuelve el límite resultante.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2} 5\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = 5\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} \\
&= 5\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 5\lim_{x\to 2} x+2 = 5(2+2) = 20
\end{aligned}$$

Ejemplo 3

Determinar $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+x}{x}\right)\left(\dfrac{3x}{x^3+4x^2+2x}\right)$

Solución: Se aplica la propiedad 3 y se resuelven los límites resultantes.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x}{x}\right)\left(\frac{3x}{x^3+4x^2+2x}\right)$$
$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^3+4x^2+2x}\right)$$
$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x(x^2+4x+2)}\right)$$
$$=\left(\lim_{x\to 0}x+1\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{3}{(x^2+4x+2)}\right)$$
$$=(0+1)\left(\frac{3}{0+0+2}\right)=(1)\left(\frac{3}{2}\right)$$

Ejemplo 4

Determinar $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x^2-2}$

Solución: Se aplica la propiedad 4 y se resuelve el límite resultante.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x^2-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-2)}=\frac{3+1}{3^2-2}=\frac{4}{7}$$

Ejemplo 5

Determinar $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)^3$

Solución: Se aplica la propiedad 5 y se resuelve el límite resultante.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)^3=\left(\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}\right)^3$$
$$=\left(\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\right)^3$$
$$=\left(\lim_{x\to 2}x+2\right)^3=(2+2)^3=64$$

Ejemplo 6

Determinar $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{\dfrac{x^3-27}{x-3}}$

Solución: Se aplica la propiedad 6 y se resuelve el límite resultante.

$$\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{\frac{x^3-27}{x-3}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}}$$
$$=\sqrt[3]{\lim_{x\to 3}(x^2+3x+9)}=\sqrt[3]{9+9+9}=\sqrt[3]{27}=3$$

3.3 Límites trigonométricos

En el estudio del cálculo y el análisis matemático, los límites trigonométricos juegan un papel fundamental al abordar el comportamiento de funciones trigonométricas en puntos específicos o en el infinito. Las funciones trigonométricas, como seno, coseno y tangente, son pilares de las matemáticas y se utilizan extensamente para modelar fenómenos periódicos y ondulatorios en diversas disciplinas, desde la física y la ingeniería hasta la astronomía y la biología.

Los límites trigonométricos nos permiten explorar cómo estas funciones se comportan cuando se acercan a ciertos valores, como cero o infinito, y son esenciales para entender conceptos más avanzados como la derivación e integración de funciones trigonométricas. A través de técnicas analíticas y geométricas, podemos desentrañar los misterios de las oscilaciones y los ciclos presentes en estas funciones, lo que nos brinda una comprensión más profunda de los fenómenos naturales y la capacidad de resolver una amplia gama de problemas prácticos y teóricos.

Límites básicos

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1 = \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\sin(\theta)}$$

A continuación se mostrará en la tabla a qué valor se aproxima el límite cuando θ se acerca a cero.

θ	$f(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\theta}$
$-\pi$	0
$-\pi/2$	0.63
$-\pi/3$	0.82
$-\pi/4$	0.9
$-\pi/6$	0.95
$-\pi/9$	0.97
$-\pi/12$	0.98
$-\pi/18$	0.99
0	1
$\pi/18$	0.99
$\pi/12$	0.98
$\pi/9$	0.97
$\pi/6$	0.95
$\pi/4$	0.9
$\pi/3$	0.82
$\pi/2$	0.63
π	0

Compruebe con el mismo procedimiento el siguiente límite: $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{1 - \cos(\theta)}{\theta} = 0$

Ejemplo 1: determinar $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{3x}$

Solución: observemos que $x \to 0 \Leftrightarrow 3x \to 0$, entonces haciendo cambio de variable $\theta = 3x$ tenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = \lim_{3x \to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$$

Ejemplo 2: determinar $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(\beta x)}{x}$

Solución: note que este ejercicio conserva la estructura del ejemplo anterior por lo que se procede de manera similar.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\beta x)}{x} &= \lim_{x \to 0} \beta \frac{\sin(\beta x)}{\beta x} \\
&= \beta \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\beta x)}{\beta x} \\
&= \beta(1) = \beta
\end{aligned}$$

Ejemplo 3: determinar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$

Solución: aquí se amplifica la expresión dividiendo numerador y denominador por x para transformar el límite en límites similares a los resueltos en el ejemplo 1 y 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}=\lim_{x\to 0}3\frac{\dfrac{\sin(3x)}{x}}{\dfrac{\sin(4x)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3\dfrac{\sin(3x)}{3x}}{4\dfrac{\sin(4x)}{4x}}$$

$$=\frac{3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{3x}}{4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(4x)}{4x}}=\frac{3}{4}$$

Ejemplo 4: determinar $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\tan(x)}{x-\pi}$

Solución: el límite básico es $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin(\theta)}{\theta}=1$ y acá $x\to\pi$. Observamos que si $x\to\pi\Rightarrow(x-\pi)\to 0$, luego hacemos el cambio de variable $\theta=x-\pi$, por lo tanto $x=\theta+\pi$. Así si $x\to\pi$ entonces $\theta\to 0$:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\tan(x)}{x-\pi}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan(\theta+\pi)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta+\pi)}{\theta\cos(\theta+\pi)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)\cos(\pi)+\sin(\pi)\cos(\theta)}{\theta(\cos(\theta\cos(\pi)-\sin(\theta)\sin(\pi))}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{-\sin(\theta)}{-\theta\cos(\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta}\frac{1}{\cos(\theta)}=1$$

Ejemplo 5: determinar $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$

Como $x\to 1\Leftrightarrow x-1\to 0$, hacemos el cambio de variable $\theta=x-1$, por lo tanto $x=\theta+1$ y así:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin(\pi x)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-(\theta+1)^2}{\sin(\pi(\theta+1))}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-(\theta^2+2\theta+1)}{\sin(\pi\theta+\pi))}=\lim_{\theta\to 0}\frac{-\theta^2-2\theta}{\sin(\pi\theta)\cos(\pi)+\sin(\pi)\cos(\pi\theta))}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{-(\theta^2+2\theta)}{-\sin(\pi\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^2+2\theta}{\sin(\pi\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta(\theta+2)}{\sin(\pi\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin(\pi\theta)}(\theta+2)=1(2)=2$$

3.4 Límites en el infinito

Definición 3.1

Se trata de límites de funciones en los que la variable independiente x crece sin límite (tiende a $+\infty$) o decrece sin límite (tiende a $-\infty$)

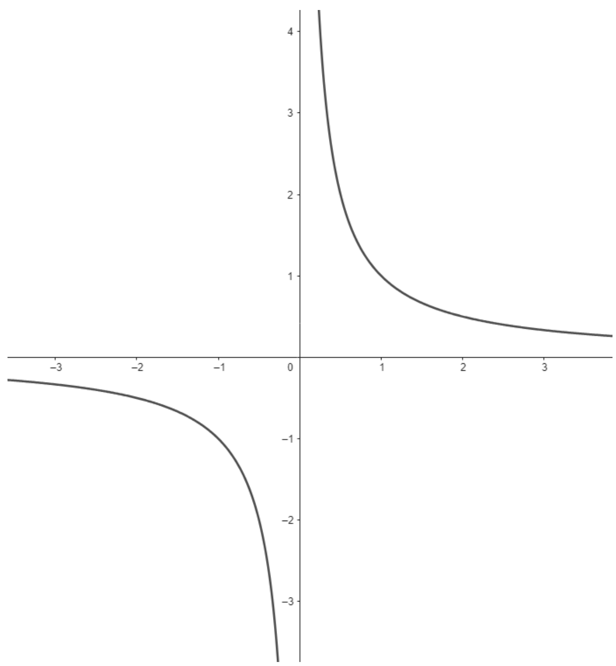
Ejemplo

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$. $D_f = \mathbb{R} - 0$

Veamos cómo son los valores de $f(x)$ cuando x toma valores muy grandes.

x	1	10	100	1000	10000	$\cdots$
$f(x)$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	$\cdots$

Figura 3.8: Ilustración gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Observamos en la gráfica de f que a medida que x crece, el valor de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se acerca cada vez más al número 0. Este comportamiento de f se denota: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

De manera similar se puede verificar que, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

- Se escribe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ si se puede hacer $f(x)$ tan cercano al número L tanto como se quiera tomando x suficientemente grande
- Se escribe $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ si se puede hacer $f(x)$ tan cercano al número L tanto como se quiera tomando x negativo, suficientemente grande en valor absoluto.

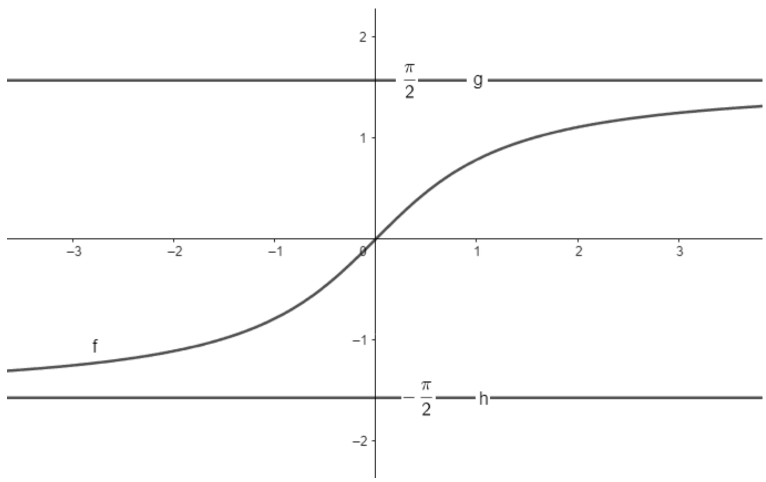
3.5 Asíntotas horizontales

La recta $y = L$ se dice que es una asíntota horizontal de la gráfica de f si ocurre que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Ejemplo
Consideremos la función $f(x) = \tan^{-1}(x)$

Figura 3.9: Ilustración gráfica de $f(x) = \tan^{-1}(x)$



De la gráfica se deduce que

$$\lim_{x\to\infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \tan^{-1}(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Así $y = \dfrac{\pi}{2}$ es asíntota horizontal para $x > 0$ e $y = -\dfrac{\pi}{2}$ es asíntota horizontal para $x < 0$.

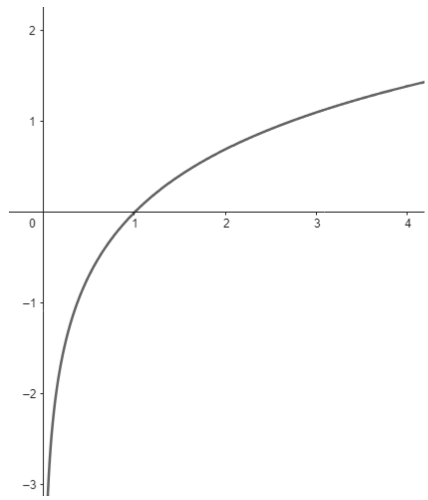
3.6 Asíntotas verticales

Se dice que la recta vertical $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f si se da al menos uno de los siguientes casos.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{a^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{a^-} f(x) = -\infty$$

Ejemplo
Consideremos la función $f(x) = \ln(x), D_f = (0, +\infty)$

Figura 3.10: Ilustración gráfica de $f(x) = \ln(x)$



$x = 0$ es la única asíntota vertical de f

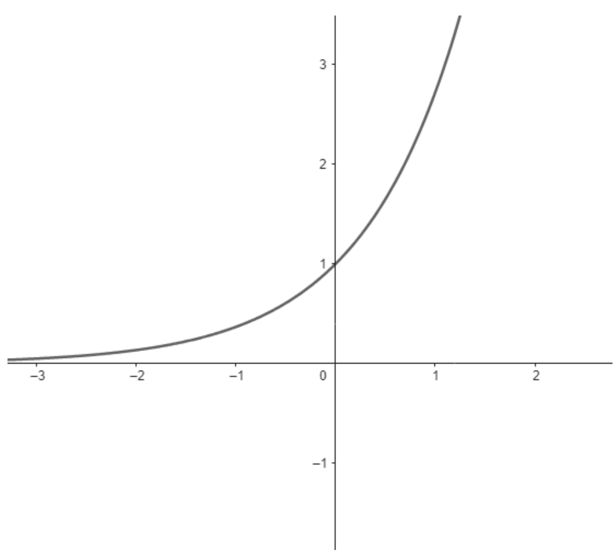
3.7 Límites infinitos en el infinito

Son límites del tipo:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Ejemplo: de la siguiente gráfica se deduce $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Figura 3.11: Ilustración gráfica de $f(x) = e^x$



Teorema 3.3

Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = C$.

Nota: $x \to a$ puede sustituirse por $x \to a^+, x \to a^-, x \to +\infty, x \to -\infty$

Entonces:

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \pm\infty$

2) i) Si $C > 0$

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \pm\infty$$

ii) Si $C < 0$

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \mp\infty$$

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$

4) i) Si $C > 0$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

ii) Si $C < 0$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \mp\infty$$

Teorema 3.4

$$\lim_{x\to\infty} \frac{C}{x^n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{C}{x^n} = 0$$

donde C es una constante y $n \in \mathbb{Z}^+$

Por ejemplo, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7}{x^2} = 0$

3.8 Otras formas indeterminadas

Al igual que la forma $\dfrac{0}{0}$ también son formas indeterminadas

$$\infty-\infty \quad (\pm\infty\cdot 0) \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Ejemplo 3.8

Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+7x-3}{2x^2+x-5}$

Solución

Con el fin de aplicar el último teorema, se divide numerador y denominador por la potencia más alta de x en el denominador.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+7x-3}{2x^2+x-5} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4x^2+7x-3}{x^2}}{\dfrac{2x^2+x-5}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{7}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^2}}\\
&= \frac{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}\right)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to\infty}4+\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}{\displaystyle\lim_{x\to\infty}2+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}}\\
&= \frac{4+0-0}{2+0-0} = \frac{4}{2} = 2
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.9

Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(2x^3-100x^2)$

Solución

Multiplicamos y dividimos por x^3

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(2x^3-100x^2) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x^3-100x^2)}{x^3}\right)x^3 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3}{x^3}-\frac{100x^2}{x^3}\right)x^3\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{100}{x}\right)x^3 = \infty
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.10

Sea $f(x) = \tan^{-1}(e^x), D_f = \mathbb{R}$, hallar las asintotas horizontales de la gráfica de f

Solución
Debemos calcular

$$\lim_{x\to\infty} \tan^{-1}(e^x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{por tanto } y = \frac{\pi}{2} \text{ es asintota horizontal para } x > 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} \tan^{-1}(e^x) = 0 \quad \text{por tanto } y = 0 \text{ es asintota horizontal para } x < 0$$

3.9 Asíntotas oblícuas

Definición 3.2
Una recta $y = mx + b, m \neq 0$, se dice una asíntota oblícua de la gráfica de una función f si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (mx + m)] = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (mx + m)] = 0$$

Procedimiento para hallar asíntotas oblícuas
Supongamos que $y = mx+b$ es una asíntota oblícua de f para $x \to \infty$, entonces

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (mx + m)] = 0 \tag{3.1}$$

Hallemos m y b de (3.1):

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - m + \frac{b}{x}\right] = 0$$

Luego

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

También de (3.1) se tiene: $\lim_{x\to\infty}[f(x) - mx - b] = 0$
y por tanto $b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$

N Lo anterior también es válido si $x \to -\infty$

Ejemplo 3.11

Hallar las asíntotas oblícuas para la función: $f(x)=\dfrac{3x^2+3x+2}{x+1}$

Solución: Primero hallamos

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+3x+2}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+3x+2}{x^2+x}=3$ Así m=3

Ahora, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-3x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+3x+2}{x+1}-3x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x+1}=0$

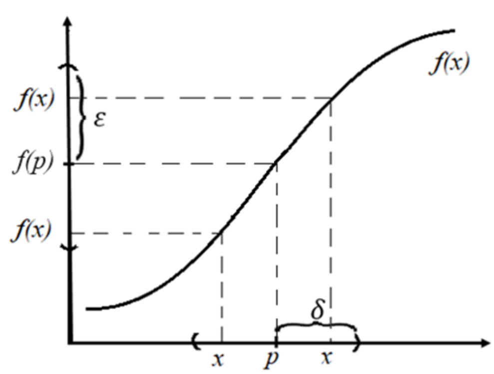
Por tanto $b=0$, luego $y=3x$ es asíntota oblícua para $x\to\infty$. Similarmente si tomamos el límite cuando $x\to-\infty$, se puede probar que $m=3$ y $b=0$. En consecuencia $y=3x$ es asíntota oblícua para $x\to-\infty$

3.10 Continuidad

Definición 3.3

Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se dice que es continua en $x_0\in\mathbb{R}$ si y solo si, dado $\epsilon>0$ cualquiera, existe $\delta>0$ tal que si $|x-x_0|<\delta$ entonces $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$

Figura 3.12: Ilustración gráfica de continuidad



N f es continua en $x_0\in\mathbb{R}$ si y solo si $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

Ejemplo: se puede verificar que, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$, es continua en $x_0=1$ puesto que $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x^2+1}=1$ y $f(1)=\dfrac{1+1}{1+1}=1$, además se puede verificar que, $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$, no es continua en 1 puesto que $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$ y $f(1)$ no existe.

Figura 3.13: Rúbrica de evaluación del aprendizaje: Describe comportamientos de las funciones, como la continuidad, asíntotas horizontales y verticales y resolver problemas prácticos que involucren aproximaciones, a través de la aplicación del concepto de límite de funciones de una variable

Criterio	Mínimo	Satisfactorio	Superior
Resolución de problemas	Comprende algunos aspectos de la situación por lo que logra encontrar una solución parcial o particular a problemas que involucran comportamientos de las funciones, como la continuidad, asíntotas horizontales y verticales y límite de funciones de una variable.	Comprende la situación, formula y ejecuta soluciones correctas para problemas comunes o casos particulares, aunque puede tener dificultades con situaciones no cotidianas que involucran comportamientos de las funciones, como la continuidad, asíntotas horizontales y verticales y límite de funciones de una variable.	Comprende y formula problemas con precisión en situaciones tanto cotidianas como no cotidianas. Encuentra y justifica soluciones óptimas y creativas para todo tipo de situaciones relacionadas con el comportamiento de las funciones, como la continuidad, asíntotas horizontales y verticales y límite de funciones de una variable
Comprensión conceptual	Muestra una comprensión superficial del comportamiento de las funciones, como la continuidad, asíntotas horizontales y verticales y límite de funciones de una variable, los utiliza para justificar o argumentar ideas, pero de manera limitada.	Comprende y utiliza adecuadamente el comportamiento de las funciones, como la continuidad, asíntotas horizontales y verticales y límite de funciones de una variable en situaciones cotidianas o simples.	Demuestra una comprensión robusta y detallada del comportamiento de las funciones, como la continuidad, asíntotas horizontales y verticales y límite de funciones de una variable y los utiliza correctamente en contextos variados y complejos.
Análisis y desarrollo de procedimientos	Desarrolla procedimientos básicos, o rutinarios en la solución de situaciones sencillas o cotidianas. Carece de un análisis detallado de los pasos a seguir.	Desarrolla procedimientos correctos y coherentes para situaciones comunes y cotidianas. Realiza un análisis adecuado del procedimiento utilizado para la solución de un problema o ejercicio.	Desarrolla procedimientos detallados y precisos para todo tipo de situaciones y realiza un análisis exhaustivo y lógico de los pasos a seguir y detecta errores en procedimientos realizados.
Uso del lenguaje matemático	Utiliza el lenguaje cotidiano para comunicar las ideas y justificar procedimientos y eventualmente usa términos y expresiones propias del lenguaje matemático.	Utiliza el lenguaje matemático de manera correcta y clara en la mayoría de las situaciones, usa terminología y expresiones adecuadas a la situación o al contexto	Utiliza el lenguaje matemático con precisión y claridad en todas las situaciones y comunica ideas complejas de manera efectiva haciendo uso apropiado del lenguaje matemático en cualquier contexto.

Fuente: Elaboración propia.

3.11 Guia de trabajo 3

1. Describir y fundamentar dos procedimientos para determinar
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3}{1-\sqrt{x}} - \dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}$ explique las ventajas o desventajas de cada uno.

2. Describir y fundamentar dos procedimientos para determinar $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$ explique las ventajas o desventajas de cada uno.

3. Describir y fundamentar dos procedimientos para determinar
$\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{t+a} - \sqrt[3]{t}}{a}$ explique las ventajas o desventajas de cada uno.

4. Describir y fundamentar dos procedimientos para determinar

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos(x)}$ explique las ventajas o desventajas de cada uno.

5. Describir y fundamentar el comportamiento de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3x}{(2x-4)}$ ¿Qué ocurre con f cuando x toma valores muy grandes? ¿Qué ocurre con f cuando x toma valores cercanos a 2? Fundamente sus respuestas.

6. Describir y fundamentar el comportamiento de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2-4)}$ ¿Qué ocurre con f cuando x toma valores muy grandes? ¿Qué ocurre con f cuando x toma valores cercanos a 2? Fundamente sus respuestas.

7. Muestre dos procedimientos para hacer la gráfica de la función

$f(x) = \dfrac{(5x^2 - 1)}{(x^2 - 3)}$ grafíquela y luego determine las asíntotas horizontales y verticales si estas existen.

8. Una población de 500 bacterias se introduce en un cultivo y crece en un número de acuerdo con la expresión. $P(t) = 500\left(1 + \dfrac{4t}{50 + t^2}\right)$ Donde t se mide en horas. Describir y fundamentar ¿Qué significa para esta situación que t tienda a infinito? ¿es esto posible? Justifique.

4 Derivadas

Un poco de historia

Cuenta la historia que durante la segunda mitad del siglo XVII, el ampliamente reconocido Isaac Newton (1642-1727) investigaba problemas relacionados con el movimiento y el cambio y en 1687, introdujo el concepto de «fluxiones» para describir las tasas de cambio instantáneo en su obra «Philosophi Naturalis Principia Mathematica». Aunque su notación y enfoque eran algo ambiguos, sus ideas sentaron las bases del cálculo diferencial y fueron la clave para resolver una amplia gama de problemas en física, incluyendo la determinación de trayectorias de cuerpos en movimiento bajo la acción de fuerzas cambiantes. Su enfoque revolucionario permitió la formulación matemática precisa de las leyes del movimiento y la comprensión del concepto de aceleración como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

Mientras tanto, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) un filósofo, matemático y diplomático alemán, estaba trabajando de manera independiente en problemas similares. Leibniz también estaba interesado en el estudio del cambio y la variación, y desarrolló su propio sistema de cálculo diferencial. En 1675, Leibniz publicó su obra «Nova Methodus pro Maximis et Minimis» (Nuevo Método para Máximos y Mínimos), donde introdujo por primera vez la notación diferencial que hoy en día asociamos con el cálculo, incluyendo el símbolo «d» para representar la diferencial y la notación «dy/dx» para denotar la derivada de una función. La notación de Leibniz resultó ser más intuitiva y elegante que la de Newton, lo que facilitó enormemente la manipulación de expresiones diferenciales y la comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial. Su trabajo allanó el camino para el desarrollo futuro del cálculo y se convirtió en la base de la notación estándar utilizada en la actualidad.

A pesar de sus diferencias metodológicas, tanto Newton como Leibniz hicieron contribuciones fundamentales al desarrollo del cálculo diferencial. Sus obras revolucionaron la forma en que entendemos el cambio y la variación.

Resultados de aprendizaje

- Justifica las estrategias utilizadas en el proceso de modelación y resolución de problemas utilizando las técnicas de derivación (trazo de curvas y tasas de cambio relacionadas)
- Resuelve problemas relacionados con procesos de optimización en contextos determinados, haciendo uso adecuado de los criterios de la derivada.

Activación de saberes previos

Imaginen que se ha plantado una semilla y se observa cómo crece la planta con el paso del tiempo. Para ello, se mide la altura de la planta en cada mes, como se muestra en la figura. 4.1.

Figura 4.1: Ilustración del crecimiento de una planta meses después de su germinación.

¿Es posible predecir la altura de la planta en un futuro cercano? Justifica.

¿Cambia la altura de la planta de la misma manera en todos los meses? ¿En qué intervalos de tiempo la planta crece más rápido o más lento?

Ahora, ¿cómo podemos abordar estas preguntas? ¿Cómo podemos calcular la velocidad de crecimiento de una planta en función del tiempo? ¿Qué herramientas matemáticas necesitamos para hacerlo? Estas son las cuestiones que se estudiarán en este capítulo.

4.1 Variación y cambio

En el contexto del crecimiento de una planta, el cambio se refiere a cualquier modificación en una característica específica de la planta a lo largo del tiempo. Por ejemplo, si observamos la altura de la planta en función del tiempo, el cambio se manifestaría en el aumento de esta altura a medida que pasa el tiempo. Este cambio puede ser gradual, como el crecimiento continuo de la planta día a día, o puede ser más abrupto, como el resultado de un período de crecimiento acelerado después de un período de lluvias abundantes o fertilización. Si nos concentramos en la figura 4.1, se observa que la altura de la planta cambió del mes 1 al mes 9, por ejemplo.

Por su parte, la variación se refiere a las diferencias o fluctuaciones en la característica que estamos observando, esto es, la variación se entiende como la medida del cambio. En el caso del crecimiento de la planta, la variación podría manifestarse en diferentes tasas de crecimiento en momentos distintos del ciclo de vida de la planta. Nuevamente, en el caso de la figura 4.1, ¿podrías estimar la diferencia de alturas de la planta del mes 1 al mes 5? Muestra tu respuesta y justificación.

Formalmente, supongamos que y representa la altura de la planta en metros y t el tiempo en meses transcurridos a partir de su germinación, es decir y depende de t, se define la variación de t en el intervalo $[t_1, t_2]$ como $\Delta t = t_2 - t_1$ y la variación de y como $\Delta y = y_2 - y_1$.

N Si $\Delta y < 0$ significa que hay decrecimiento en la variable.

Si $\Delta y = 0$ significa que no hay cambio en la variable, es decir se mantiene constante.

Si $\Delta y > 0$ Significa que hay crecimiento en la variable.

En el caso del cambio de la altura de la planta del mes 1 al mes 5 se dice que:

$\Delta y \approx 1{,}7m - 0{,}4m \approx 1{,}3m$, es decir, la planta creció aproximadamente $1{,}3m$ en 4 meses.

4.2 Razón promedio de cambio

Si hacemos una comparación mediante el cociente (Razón) entre la altura de la planta y el tiempo transcurrido, se puede observar la rápidez con la que ha crecido la planta en un intervalo de tiempo determinado, en el caso del crecimiento del mes 1 al mes 5, la rápidez de crecimiento de la planta viene dada por:

$$RC = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \frac{1,3m}{4meses} \approx \frac{0{,}325m}{mes}$$

Es decir, la planta crece a razón promedio de 0.325 metros por mes.

Formalmente, si $y = f(x)$ se define la razón promedio de cambio de f respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$ como:

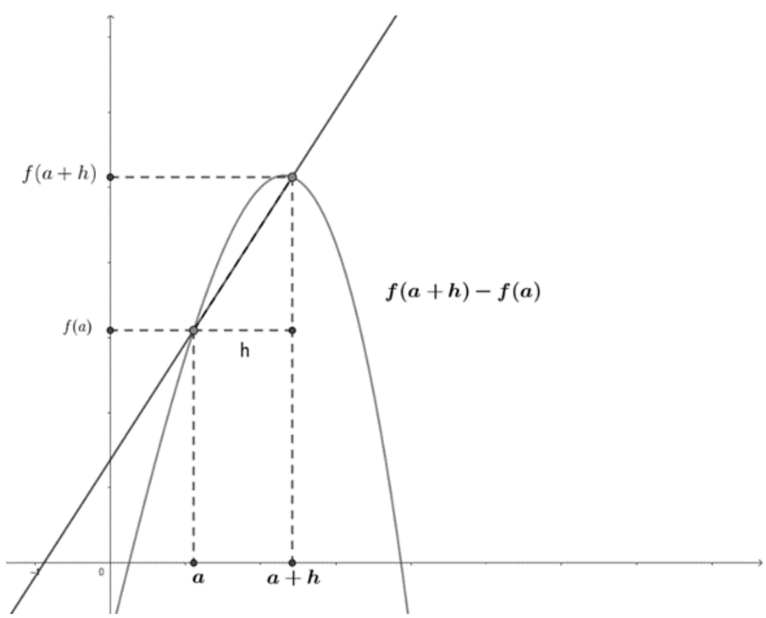
Razón promedio de cambio $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Si definimos $h = \Delta x$ entonces $h = x_2 - x_1$, por tanto, $x_2 = x_1 + h$ por tal razón $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$ y con eso $\Delta f = f(x_1 + h) - f(x_1)$ con lo que:

Razón promedio de cambio $= \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$.

Geométricamente.

Figura 4.2: Razón promedio de cambio de $f(x)$ en $[a, a + h]$



N Es común encontrar que la razón de cambio se refiere al cambio respecto al tiempo. Por ejemplo, la rápidez media se refiere al cambio en la distancia recorrida por unidad de tiempo; sin embargo, es posible hablar de la «razón de cambio» de una variable respecto a cualquier variable relacionada.

Ejemplo

La siguiente tabla muestra los ingresos en millones de dólares de cierta compañía en un período de tiempo determinado.

Ingresos	25	28	23	29	26	21	20	26	24
Año	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020

Describir y fundamentar ¿Qué tan rápido cambiaban los ingresos de la compañía en el período $[2012, 2015]$?

Describir y fundamentar ¿Qué diferencias existen entre la productividad de la empresa en los períodos $[2014, 2018]$ y $[2017, 2020]$? ¿Qué período fue más productivo para la compañía?

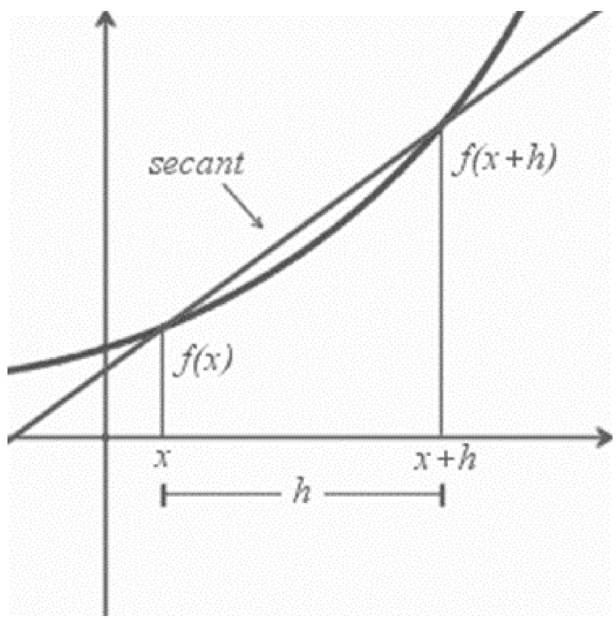
Representa gráficamente la información de la tabla. Describir y fundamentar ¿Qué diferencias observas gráficamente entre la productividad de la empresa en los períodos $[2014, 2018]$ y $[2017, 2020]$?

La razón de cambio promedio de f con respecto a x es también llamada el cociente de diferencias viene dado por

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{4.1}$$

y geométricamente se interpreta como la pendiente de la recta secante a la curva da por f en los puntos $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$

Figura 4.3: Recta secante a la curva da por f en los puntos $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$



La razón promedio de cambio de una función se puede determinar algebraicamente haciendo uso de la ecuación 4.1. Por ejemplo, consideremos la función.

$f(x) = -x^2+5x+2$ y veamos la razón promedio de cambio en el intervalo $[2,4]$.

Solución

Procedimiento 1. (Numéricamente)

Tenemos que $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, por lo tanto, $\Delta x = x_2 - x_1 = 4 - 2 = 2$.

Además $f(x_1) = f(2) = -2^2 + 5{,}2 + 2 = 8$ y $f(x_2) = f(4) = -4^2 + 5{,}4 + 2 = 6$, luego, $\Delta f = f(x_2) - f(x_1) = 6 - 8 = -2$ y con eso

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-2}{2} = -1$$

La función decrece a una razón promedio de una unidad en y por cada unidad de la variable x.

Procedimiento 2. (Algebraicamente)
La razón promedio de cambio de f en el intervalo $[2,4]$ viene dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{(-(x+h)^2+5(x+h)+2)-(-x^2+5x+2)}{h}\\
\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{(-(x^2+2xh+h^2)+5x+5h+2)+x^2-5x-2}{h}\\
\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{-x^2-2xh-h^2+5x+5h+2+x^2-5x-2}{h}\\
\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{-2xh-h^2+5h}{h} = \frac{h(-2x-h+5)}{h}\\
\frac{\Delta f}{\Delta x} &= -2x-h+5
\end{aligned}$$

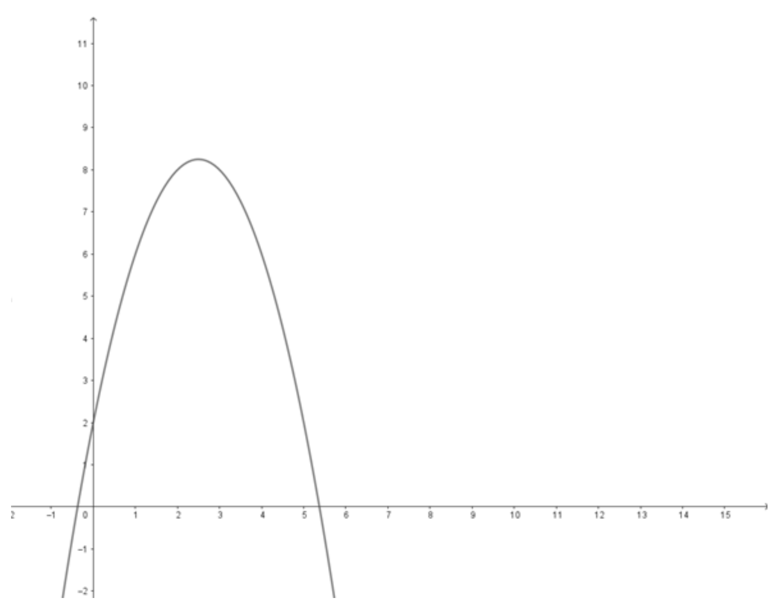
Pero $h = \Delta x = x_2 - x_1 = 4 - 2 = 2$ y $x = 2$ luego,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = -2(2) - 2 + 5 = -6 + 5 = 1$$

Que es el valor que se ha obtenido numéricamente en el procedimiento 1.

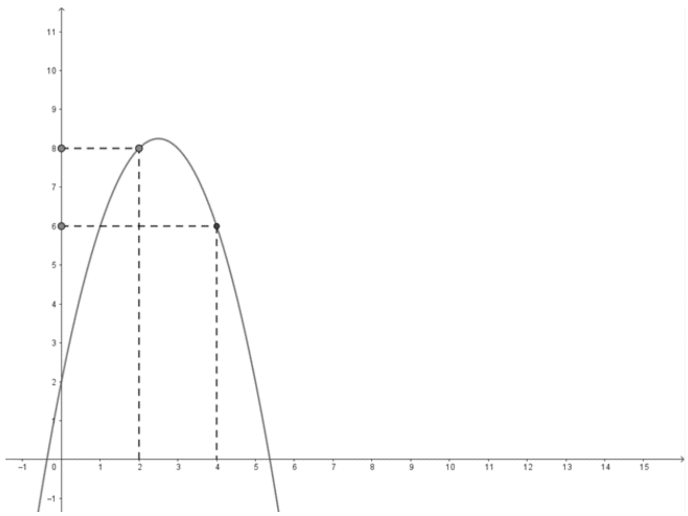
Procedimiento 3. (Gráficamente)
Representamos gráficamente la función $f(x) = -x^2 + 5x + 2$ (Puedes usar un programa graficador, GeoGebra por ejemplo)

Figura 4.4: Representación gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 5x + 2$



Hallamos la imagen de f en los puntos $x = 2$ y $x = 4$

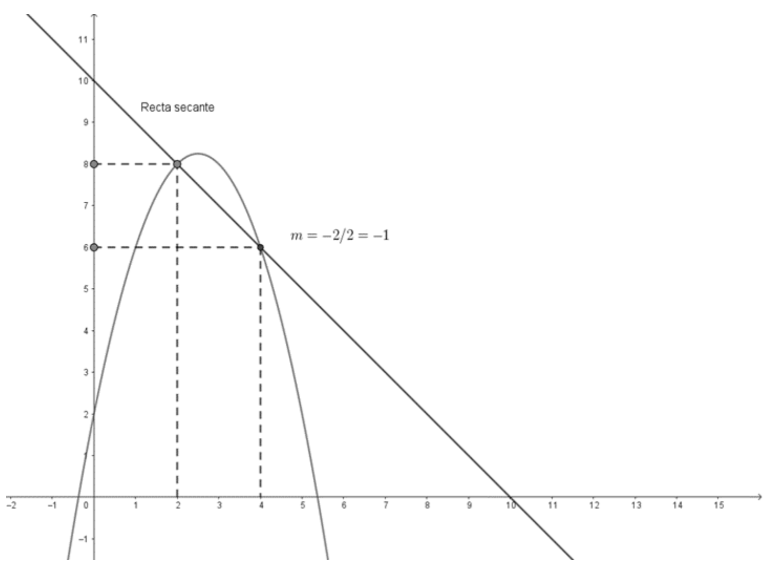
Figura 4.5: Imagen de f en los puntos $x = 2$ y $x = 4$



Se observa que $f(2) = 8$ y $f(4) = 6$.

Ahora hallamos la pendiente de la recta secante a la curva en los puntos $(2, 8)$ y $(4, 6)$.

Figura 4.6: Representación gráfica de la recta secante y su pendiente.



Se observa que la pendiente de la recta secante es $m = -1$ y que en el intervalo $[2, 4]$ la función es decreciente, por tanto, La función decrece a una razón promedio de una unidad en y por cada unidad de la variable x como se había obtenido en los anteriores procedimientos.

Ahora, cuentas con al menos tres caminos para determinar la razón promedio de cambio de una variable dependiente respecto al cambio de una variable independiente relacionada.

4.3 Razón instantánea de cambio

Ahora imagínate que deseas determinar el cambio de una variable dependiente respecto a una variable independiente relacionada, pero en un instante determinado, es decir, ¿qué ocurre con $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \to 0$?.

El problema se traduce en determinar

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

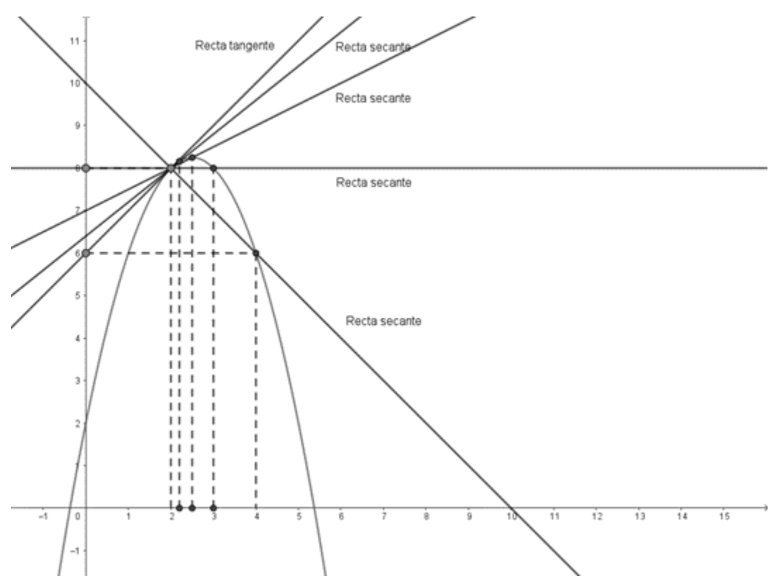
Es decir, ¿qué ocurre con la razón de cambio cuando los cambios en la variable independiente son tan pequeños como sea posible?

Veamos, ¿qué ocurre con la pendiente de la recta secante de la función?

$f(x) = -x^2 + 5x + 2$ en el intervalo $[2, 4]$ cuando $\Delta x \to 0$?

Gráficamente ocurre lo siguiente.

Figura 4.7: Representación del cambio que sufre la pendiente de la recta secante cuando $\Delta x \to 0$



Se nota que, a medida que $\Delta x \to 0$ la recta secante se hace más próxima a la recta tangente a la curva dada por $f(x)$ en $x = 2$.

Es decir, geométricamente la razón instantánea de cambio de $f(x)$ en el punto $x = a$ se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la curva dada por f en el punto $x = a$.

En el caso de $f(x) = -x^2 + 5x + 2$ la razón instantánea de cambio en el punto $x = 2$ viene dada por:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-(x+h)^2 + 5(x+h) + 2) - (-x^2 + 5x + 2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-(x^2 + 2xh + h^2) + 5x + 5h + 2) + x^2 - 5x - 2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-x^2 - 2xh - h^2 + 5x + 5h + 2 + x^2 - 5x - 2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh - h^2 + 5h}{h} = \frac{h(-2x - h + 5)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (-2x - h + 5) = -2x + 5$$

Para $x = 2$ se tiene que,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -2(2) + 4 = 1$$

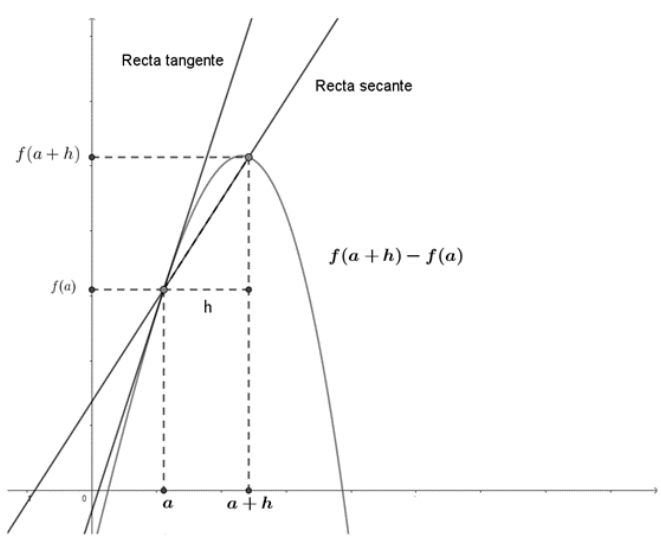
4.4 Construcción del concepto de derivada

Definimos la derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ como la razón instantánea de cambio en el punto $x = a$ siempre que esta exista, es decir.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ Si el límite existe.}$$

Y como hemos visto antes, se puede interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $x = a$, siempre que esta exista.

Figura 4.8: Interpretación geométrica de la derivada de $f(x)$ en $x = a$



En resumen.

La derivada de una función en un punto dado representa la tasa instantánea de cambio de la función en ese punto. En otras palabras, nos indica cómo está cambiando el valor de la función en ese punto específico, considerando intervalos de tiempo cada vez más pequeños.

Para comprender mejor, consideremos una función $f(x)$ y un punto $x = a$ en su dominio. Queremos calcular la derivada de $f(x)$ en el punto $x = a$, que denotamos como $f'(a)$ o $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}$

Usando el concepto de razón promedio de cambio, podemos aproximar la tasa de cambio de la función alrededor del punto $x = a$ utilizando dos puntos cercanos $x = a$ y $x = a + h$, donde h es un valor muy pequeño.

Entonces, la razón promedio de cambio de la función entre estos dos puntos se puede calcular como:

Razón promedio de cambio $= \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

A medida que hacemos h más pequeño, estamos considerando intervalos de tiempo más cortos y, por lo tanto, obtenemos una mejor aproximación de la tasa de cambio instantánea en el punto $x = a$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Esta expresión nos da la tasa de cambio instantánea de la función en el punto $x = a$, es decir, la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en ese punto. La derivada de una función en un punto dado nos proporciona información crucial sobre cómo se comporta la función en ese punto.

¿Si $f(x)$ representa el costo de producir x artículos, qué representa $f'(10)$?

Ejemplo 4.1

Describir y fundamentar la derivada de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Solución

Por definición $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}}}{\dfrac{h}{1}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x+h}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)}{h(\sqrt{x+h}\sqrt{x})\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x - x - h}{h(\sqrt{x+h}\sqrt{x})\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(\sqrt{x+h}\sqrt{x})\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(\sqrt{x+h}\sqrt{x})\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(\sqrt{x}\sqrt{x})\left(\sqrt{x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

Ejemplo 4.2

Hallar la pendiente de $f(x) = 2x - 3$ en el punto $(2, 1)$

Solución

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{[2(2+h) - 3] - [2(2) - 3]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 2h - 3 - 4 + 3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \to 0} 2 = 2
\end{aligned}$$

Por tanto, la pendiente de f en $(2, 1)$ es $m = 2$.

Ejemplo 4.3

Describir y fundamentar la derivada de la función $f(x) = x^2 + 2x$

Solución

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x) - (x^3 + 2x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 2]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} [3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 2] \\
&= 3x^2 + 2
\end{aligned}
$$

4.5 Diferenciabilidad

i) Una función f se dice **diferenciable** en un número a si existe

$f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ es decir, los límites laterales existen y son iguales.

Esto es, $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

ii) Una función f se dice diferenciable en un intervalo abierto I si f es diferenciable en cada número a de I.

Ejemplo 4.4

Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$, probar que f no es diferenciable en 0.

Solución

$$
f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{1/3}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty
$$

Describir y fundamentar si la función $f(x) = |x|$ es diferenciable en $x = 0$. Ilustre gráficamente

Teorema 4.1

Si f es diferenciable en a, entonces, f es continua en a, entonces existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] &= \lim_{x \to a} \frac{[f(x) - f(a)]}{x - a}(x - a) \\
&= \lim_{x \to a} \left(\frac{[f(x) - f(a)]}{x - a} \right) \lim_{x \to a}(x - a) \\
&= f'(a), 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

En consecuencia $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, y así, f es continua en a

N El recíproco del Teorema anterior es falso; esto es, hay funciones que son continuas, pero no son diferenciables, es decir, f continua en a no implica f diferenciable en a; por ejemplo las funciones $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $f(x) = |x|$ son continuas en 0, pero no son diferenciables en 0.

Ejemplo 4.5

Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 1 \\ 2x - 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

Determine si f es o no diferenciable en $x = 1$.

Solución
Debemos hallar $f'_+(1)$ y $f'_-(1)$. En efecto:

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2 \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x - 1 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1^-} \frac{2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2(x-1)}{x - 1} = 2 \end{aligned}$$

En consecuencia, $f'_+(1) = f'_-(1)$, y así, f es diferenciable en 1.

Describir y fundamentar si la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ es diferenciable en $x = 2$.

4.6 Reglas de derivación

Determinar la derivada de una función usando la definición de límite puede llegar a ser un proceso tedioso dependiendo de la función que se esté derivando, las reglas de derivación son técnicas que permiten el cálculo de la derivada de una función usando reglas o procedimientos menos complejos, a continuación, estudiaremos algunas de ellas.

4.7 Derivada de una función constante

La derivada de una función constante es igual a cero, lo cual tiene sentido, ya que si la derivada nos ayuda a determinar el cambio de una función respecto al cambio de la variable independiente y si la función no cambia, por ende su derivada es cero.

Formalmente, si $f(x) = c$ entonces $f'(x) = 0$

Demostración:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$$

Dividiendo por Δx tenemos que $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$ y de aquí que $\dfrac{dc}{dx} = 0$

4.8 Derivada de una función potencia

Si n es un número racional, $\dfrac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$

Demostración: sea $y = f(x) = x^n$

Entonces: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{(x + \Delta x^n) - x^n}{\Delta x}$

¿Como n es un entero positivo, podemos aplicar la fórmula algebraica:

$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$

Con $a = x + \Delta x, b = x, a - b = \Delta x$, entonces.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \frac{(\Delta x)\left((x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \cdots + (x + \Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}\right)}{\Delta x} \\
&= \left((x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \cdots + (x + \Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\begin{aligned}
&= \left((x + 0)^{n-1} + (x + 0)^{n-2}x + \cdots + (x + 0)x^{n-2} + x^{n-1}\right) \\
&= \left(x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1}\right) \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

Luego, $\dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

4.9 Derivada de una suma o diferencia de funciones

La derivada de una suma (o diferencia) de dos funciones derivables es la suma (o diferencia) de sus derivadas.

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = f'(x)-g'(x)$$

4.10 Reglas de derivación de productos y cocientes

Pudimos darnos cuenta de que la derivada de una suma o diferencia de funciones es simplemente la suma o diferencia de sus derivadas. Las reglas para derivar productos o cocientes no son tan sencillas, incluso pueden parecer sorprendentes.

4.11 Regla del producto

El producto de dos funciones derivables f y g es a su vez derivable. Además, la derivada de $f * g$ es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda más la segunda por la derivada de la primera.

$$\frac{d}{dx}[f(x)*g(x)] = f(x)*g'(x)+g(x)*f'(x)$$

Ejemplo 4.6

Describir y fundamentar la derivada de la función $h(x) = f(x).g(x)$

Solución

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x+h)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]}{h}\\
&= g(x)\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}+\lim_{h\to 0}f(x+h)\lim_{h\to 0}f(x+h)\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}\\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

4.12 Regla del cociente

El cociente $\dfrac{f}{g}$ de dos funciones derivables f y g es también derivable en todos los valores de x para los que $g(x) \neq 0$. Además, la derivada de $\dfrac{f}{g}$ es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, dividido todo ello por el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$

Demuestre la fórmula para la derivada de un cociente de funciones.

Ejercicios resueltos sobre derivadas

Ejemplo **4.7**

Use la fórmula de la derivada de un cociente para derivar $f(t) = \dfrac{t^2}{2t^2 + t + 1}$

Solución

$$f'(t) = \frac{2t(2t^2 + t + 1) - t^2(4t + 1)}{(2t^2 + t + 1)^2}$$
$$f'(t) = \frac{4t^3 + 2t^2 + 2t - 4t^3 - t^2}{(2t^2 + t + 1)^2}$$
$$f'(t) = \frac{t^2 + 2t}{(2t^2 + t + 1)^2}$$
$$f'(t) = \frac{t(t + 2)}{(2t^2 + t + 1)^2}$$

Ejemplo **4.8**

Hallar $f'(x)$ si $f(x) = x^3$

Solución

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2)$$
$$f'(x) = 3x^2$$

Ejemplo 4.9

Hallar $f'(x)$ dada $f(x) = \sin(x)$

Solución

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) - \sin(x) + \sin(h)\cos(x)}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1)}{h} + \frac{\sin(h)\cos(x)}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)\cos(x)}{h} \\
f'(x) &= -\sin(x) \lim_{h\to 0} \frac{(1 - \cos(h))}{h} + \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
f'(x) &= -\sin(x)(0) + \cos(x)(1) = \cos(x)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.10

Fundamentar la derivada de la función $f(x) = e^x$

Solución

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} \\
f'(x) &= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} \\
f'(x) &= e^x(1) = e^x
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.11

Determine la derivada de la función $f(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$

Solución

$$f'(\theta) = \frac{\cos(\theta)(1+\cos(\theta)) - \sin(\theta)(-\sin(\theta))}{(1+\cos(\theta))^2}$$
$$f'(\theta) = \frac{\cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{(1+\cos(\theta))^2}$$
$$f'(\theta) = \frac{\cos(\theta) + 1}{(1+\cos(\theta))^2}$$
$$f'(\theta) = \frac{1}{1+\cos(\theta)}$$

Use la definición de límite para determinar la derivada de la función $f(x) = 2x^{3/2}$

4.13 Derivadas conocidas

Tabla 4.1: Derivadas más comunes

Función	Derivada
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln(a)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \sec^2(x)$
$f(x) = \cot(x)$	$f'(x) = -\csc^2(x)$
$f(x) = \sec(x)$	$f'(x) = \sec(x)\tan(x)$
$f(x) = \csc(x)$	$f'(x) = -\csc(x)\cot(x)$
$f(x) = \text{arcsin}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \text{arc}\cos(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \text{arctan}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \text{arccot}(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \text{arcsec}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$f(x) = \text{arccsc}(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

4.14 Derivadas de orden superior

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable, se define la segunda derivada de f como:

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

si el límite existe, es decir $f''(x) = [f'(x)]'$ o utilizando otra notación quedaría:
$f''(x) = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)$, en general

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)$$

es decir la derivada de la derivada...

N Una ventaja de la notación $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ es que especifica cuál es la variable independiente (denominador) y cuál es la variable dependiente (numerador)

Ejemplo 4.12

Encuentra la segunda derivada dada la función $f(x) = x^2 e^x + \ln(x)$

Solución
Tenemos que: $f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x + \dfrac{1}{x} = e^x(x^2 + 2x) + \dfrac{1}{x}$
Luego $f''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x - \dfrac{1}{x^2} = e^x(x^2+4x+2) - \dfrac{1}{x^2}$

Ejemplo 4.13

Encuentra la segunda derivada dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Solución

$$f'(x) = \frac{1(x+1) - x(1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{0(x+1)^2 - 1(2)(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$$

4.15 Regla de la cadena

Sean $g : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ y $f : B \subset \mathbb{R} \to C \subset \mathbb{R}$ derivables en $a \in A$ y en $b \in B$ con $b = g(a)$ respectivamente, entonces:

$$\begin{aligned} f \circ g : A \subset \mathbb{R} &\to C \subset \mathbb{R} \\ x &\to f(g(x)) \end{aligned}$$

Es derivable en $a \in A$ y se cumple que:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

N Es común encontrar el enunciado del teorema de la regla de la cadena de la siguiente manera.

Si $y = f(u) \to u = g(x)$, y si $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$ y $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ existen entonces la función compuesta definida por $y = f(g(x))$ tiene una derivada dada por

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'(u) \cdot g'(u) = f'(g(x))g'(x).$$

Podemos decir que la regla de la cadena es la técnica que permite calcular la derivada de una función compuesta.

Ejemplo 4.14

Derivar $f(x) = (x^2 + 1)^{3/2}$

Solución

Sea $u = x^2 + 1$ e $y = u^{3/2}$.

Luego

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \frac{3}{2}u^{3/2-1}$$

Entonces $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \dfrac{3}{2}u^{1/2}$ con lo que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{3}{2}u^{1/2}2x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3(x^2 + 1)^{1/2}x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x(x^2 + 1)^{1/2}$$

Ejemplo 4.15

Derivar $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

Solución

Sea $u = x + \sqrt{1+x^2}$ entonces $y = \ln(u)$.

Ahora $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1}{u}$, además

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 1 + \left(\sqrt{1+x^2}\right)' = 1 + \left((1+x^2)^{1/2}\right)' \\
&= 1 + \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}(2x) \\
&= 1 + \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} = 1 + \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

Luego $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$ con eso

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{1}{u} \cdot \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

Aplique la regla de la cadena para derivar $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Observación

Para derivar una función compuesta, es necesario identificar la función interna, esta será la que ocupe el lugar de x en las fórmulas de derivación.

Esto es: si $y = f(g(x))$ y $u = g(x)$ entonces $y = f(u)$, con lo que: $y' = f'(u)\,du$

De esto surgen las siguientes fórmulas de derivación

Tabla 4.2: Derivadas más comunes

Función	Derivada
$f(u) = u^n$	$f'(u) = nu^{n-1}u'$
$f(u) = a^u$	$f'(u) = a^u \ln(a)u'$
$f(u) = \sqrt{u}$	$f'(u) = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$f(u) = e^u$	$f'(u) = e^u u'$
$f(u) = \ln(u)$	$f'(u) = \dfrac{u'}{u}$
$f(u) = \sin(u)$	$f'(u) = \cos(u)u'$
$f(u) = \cos(u)$	$f'(u) = -\sin(u)u'$
$f(u) = \tan(u)$	$f'(u) = \sec^2(u)u'$
$f(u) = \cot(u)$	$f'(u) = -\csc^2(u)u'$
$f(u) = \sec(u)$	$f'(u) = \sec(u)\tan(u)u'$
$f(u) = \csc(u)$	$f'(u) = -\csc(u)\cot(u)u'$
$f(u) = \arcsin(u)$	$f'(u) = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$f(u) = \arccos(u)$	$f'(u) = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$f(u) = \arctan(u)$	$f'(u) = \dfrac{u'}{1+u^2}$
$f(u) = \mathrm{arccot}(u)$	$f'(u) = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
$f(u) = \mathrm{arcsec}(u)$	$f'(u) = \dfrac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
$f(u) = \mathrm{arccsc}(u)$	$f'(u) = -\dfrac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

4.16 Derivación Implícita

Supongamos que y depende de x en la ecuación $G(x, y) = C$ es decir, existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y con eso $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, el problema es: ¿cómo calcular $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en la ecuación $G(x, y) = C$?

Ilustración

¿Es posible despejar y como una función de x en la expresión $x^2 + y^2 = 25$? en tal caso hallar $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

Como $y^2 = 25 - x^2$, entonces $y = \sqrt{25 - x^2}$

Luego $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} = \dfrac{-x}{y}$

El procedimiento anterior es posible siempre que algebraicamente se pueda despejar y en términos de x aplicando reglas del álgebra, pero esto no siempre es posible. Por otro lado, no se especifica para qué valores de x se tiene que $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ existe.

N Para hallar $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en una ecuación $G(x, y) = C$, se puede despejar $y = f(x)$ y luego derivar, pero eso no siempre es posible, así que se obtiene otra estrategia.

Un procedimiento general que se puede aplicar siempre que y dependa de x en la ecuación $G(x, y) = C$, pero algebraicamente no se pueda despejar consiste en la ecuación $G(x, y) = C$ derivar ambos lados de la igualdad partiendo del hecho de que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ exista.

Esto es $G(x, y)' = C'$ y aplicamos la regla de la cadena del lado izquierdo, teniendo en cuenta que

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'$$

Volviendo al ejemplo anterior, para hallar $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en $x^2 + y^2 = 25$

Procedemos de la siguiente manera

$$(x^2 + y^2)' = (25)'$$

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

Que es el mismo resultado del procedimiento anterior. Es importante tener en cuenta que $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ existe si $y \neq 0$

Ejemplo 4.16

Hallar $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en $x - y = (x^2 + y^2)^2$

Solución
Derivamos a ambos miembros

$$
\begin{aligned}
(x-y) &= [(x^2+y^2)^2]' \\
1 - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2(x^2+y^2)(2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) = 4x(x^2+y^2) + 4y(x^2+y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) \\
1 - 4x(x^2+y^2) &= 4y(x^2+y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (4y(x^2+y^2)+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\
\frac{1-4x(x^2+y^2)}{(4y(x^2+y^2)+1)} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.17

Hallar $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en $xy^2 + \arctan(xy) = 1$

Solución
Derivamos a ambos miembros de la igualdad

$$
\begin{aligned}
\text{Como } (xy^2 + \arctan(xy))' &= (1)' \text{ entonces } (xy^2)' + (\arctan(xy))' = 0 \\
y^2 + x2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{(xy)'}{1+x^2y^2} &= 0 \text{ entonces } y^2 + 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{1+x^2y^2} = 0 \\
y^2 + 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{1+x^2y^2}\frac{x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{1+x^2y^2} &= 0 \\
2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{1+x^2y^2} &= -y^2 - \frac{y}{1+x^2y^2} \\
2xy[1+x^2y^2]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -y^2(1+x^2y^2) - y \\
[2xy[1+x^2y^2]+x]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -y[y(1+x^2y^2)+1] \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{-y[y(1+x^2y^2)+1]}{[2xy[1+x^2y^2]+x]}
\end{aligned}
$$

4.17 Aplicaciones de la derivada a tasas relacionadas

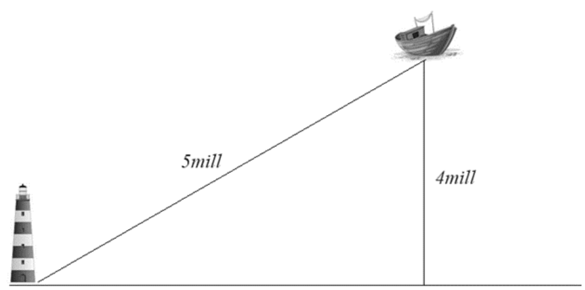
Una de las aplicaciones más importantes de la regla de la cedena y la derivada implícita es la resolución de problemas con tasas relacionadas.

Esto es: $y \to x \to t$ de donde: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

Ilustración

Un barco navega paralelamente a una costa, con una velocidad de $12mill/h$, a una distancia de $4millas$. ¿con qué velocidad se aleja de un faro sobre la costa, cuando el barco está a $5millas$ del faro?

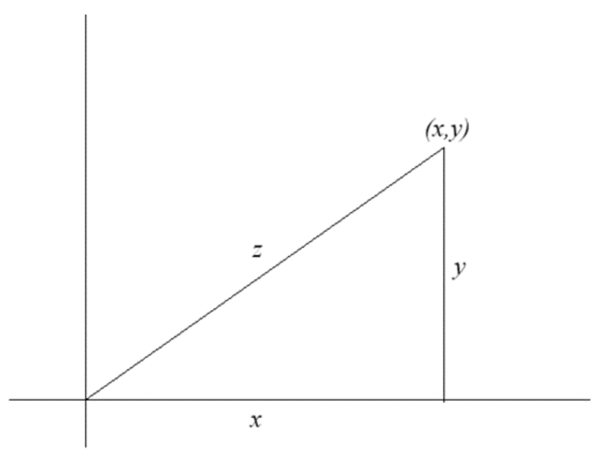
Figura 4.9: Ilustración Problema del barco



Solución

Pasamos la situación al lenguaje matemático

Figura 4.10: Representación en el plano xy del problema del barco



Notemos que z cambia cuando x cambia, además y es constante

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Ahora: Por teorema de Pitágoras

$x^2 + y^2 = z^2$

Derivamos implícitamente

$$2x + 0 = 2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2x}{2z} = \dfrac{x}{z}$

Ahora como $x^2 + y^2 = z^2$, pero $y = 4$, $z = 5$ entonces $x^2 + 4^2 = 5^2$ luego, $x^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow x^2 = 9$, luego $x = 3$, con eso

$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{z} = \dfrac{3}{5}$

además $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ es la velocidad del barco, con eso $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 12mill/h$, luego

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$
$$= \frac{3}{5} \cdot 12mill/h$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 7{,}2mill/h$$

Ejemplo 4.18

Sobre un montón cónico cae arena a razón de $4ft^3/m$, si el radio de la base es tres veces la altura, ¿con qué rápidez cambia la altura cuando esta es $8ft$?

Figura 4.11: Ilustración de montón cónico de arena

Solución

Tenemos que el volumen de un cono es $v = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.
Donde $r :=$ radio de la base y $h :=$ altura.
Pero el radio es tres veces la altura con lo que $r = 3h$, por tanto

$$v = \frac{\pi(3h)^2 h}{3} = \frac{\pi 9h^3}{3} = 3\pi h^3$$

Razonamientos

1. $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = 4ft^3/min$ (Cambio del volumen con el tiempo)
2. Si el volumen cambia, h cambia, luego $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}v}$ existe.
3. h cambia con el tiempo, luego $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ existe
   Ahora, por regla de la cadena

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Como $v = 3\pi h^3$ entonces

$$\begin{aligned} h^3 &= \frac{1}{3\pi} v \\ h &= \frac{1}{\sqrt[3]{3\pi}} v^{1/3} \\ \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}v} &= \frac{1}{3\sqrt[3]{3\pi}} v^{-2/3} \end{aligned}$$

Es decir $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}v} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{3\pi}v^{2/3}}$.
Cuando $h = 8ft$ se tiene que $v = \pi(8ft)^3 = 512\pi ft^3$, luego

$$\begin{aligned} v^{2/3} &= (512\pi ft^3)^{2/3} \\ &= 64\pi^{2/3} ft^2 \end{aligned}$$

Con eso $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}\pi^{1/3} 64\pi^{2/3} ft^2} = \dfrac{1}{192\sqrt{3}\pi ft^2}$
Luego

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{192\sqrt{3}\pi ft^2} \cdot 4ft^3/min \\ &= \frac{1}{48\sqrt{3}\pi} ft/min \end{aligned}$$

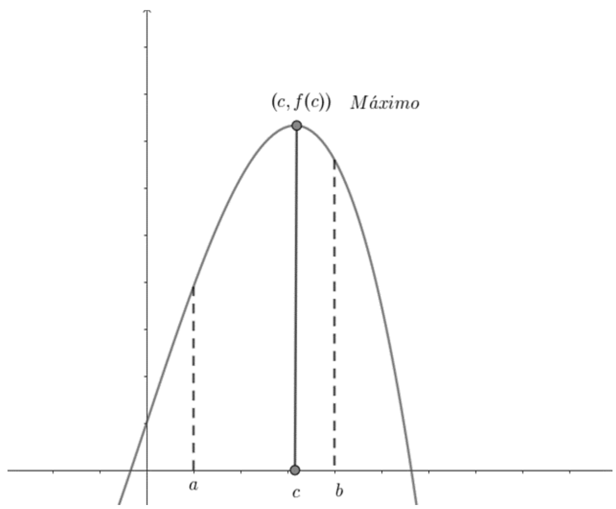
4.18 Aplicaciones de la derivada

4.18.1 Valores extremos

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y sea $c \in [a, b]$ decimos que:

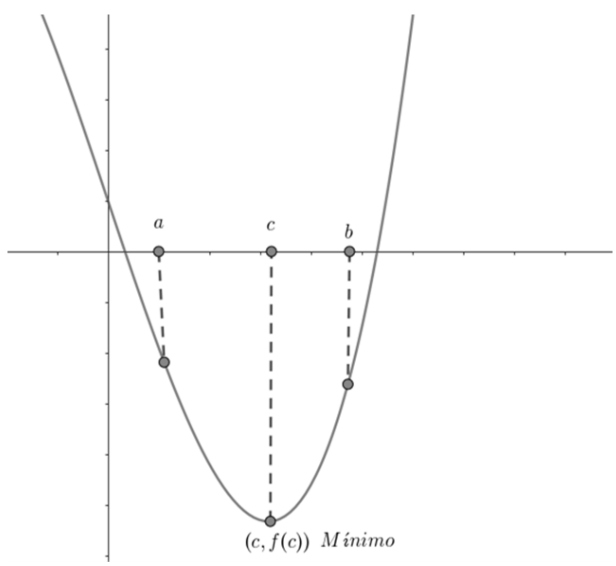
1. $f(c)$ es un máximo de f en $[a, b]$ si y solo si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$

Figura 4.12: Ilustración del máximo de f en $[a, b]$



2. $f(c)$ es un mínimo de f en $[a, b]$ si y solo si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$

Figura 4.13: Ilustración del minimo de f en $[a, b]$



Llamaremos extremo al máximo y al mínimo de f en $[a, b]$

4.18.2 Valores críticos

Sea f continua en $[a,b]$ y sea $c \in [a,b]$ decimos que c es un punto crítico de f si y solo si $f'(c) = 0$ o no está definida

Ejemplo 4.19

Encuentre los puntos críticos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Solución

Hallamos $f'(x)$ e igualamos a cero

$f'(x) = 3x^2 - 6x$, luego $f'(x) = 0$ si y sólo si, $3x^2 - 6x = 0$, luego $3x(x-2) = 0$ entonces $x = 0$ o $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$, luego los puntos críticos son $c_1 = 0$ y $c_2 = 2$

Ejemplo 4.20

Encuentre los puntos críticos de la función $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

Solución

Hallamos $f'(x)$ e igualamos a cero

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$$

luego

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\sqrt{1-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} - x^2}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

luego $f'(x) = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

Ahora $f'(x) = 0$ si y solo si $\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0$

Con lo que $2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$

luego $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, los posibles puntos críticos son $c_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $c_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Por otro lado $f'(x)$ no está definida cuando $\sqrt{1-x^2} = 0$ esto es $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$, otros posibles puntos críticos son $c_3 = -1$ y $c_4 = 1$

4.18.3 Teorema del valor extremo

Los valores extremos sólo ocurren en los puntos críticos, es decir si $f(c)$ es un valor extremo entonces: $f'(c) = 0$ o no está definida.

Figura 4.14: Ilustración de la recta tangente en el valor máximo.

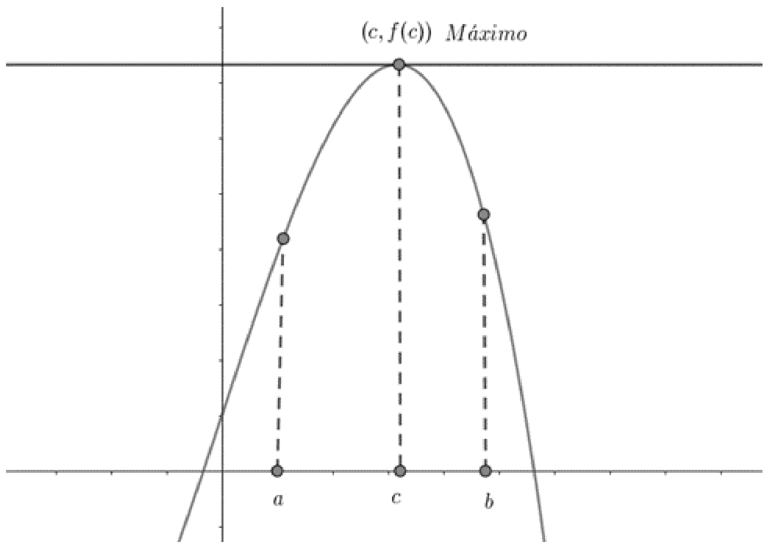
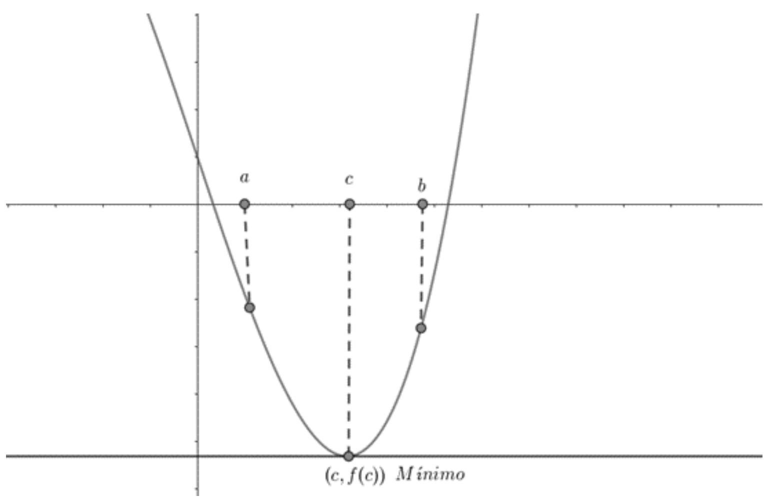


Figura 4.15: Ilustración de la recta tangente en el valor mínimo.



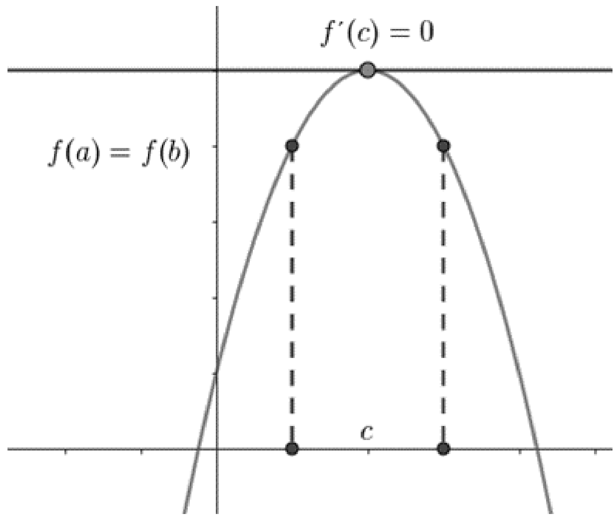
Note que en los valores extremos la recta tangente a la curva es horizontal, luego: $f'(c) = 0$

4.18.4 Teorema de Rolle

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), tal que $f(a) = f(b)$ entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

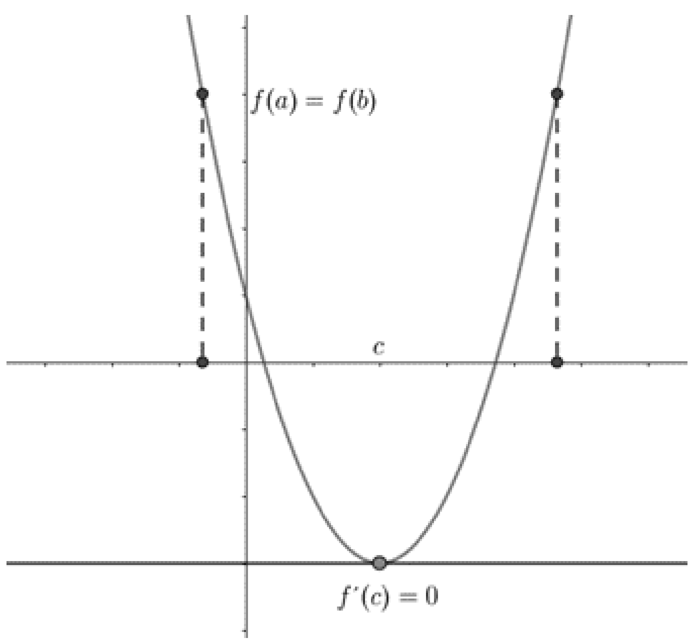
caso 1: La función crece desde $[a, c]$ y luego tiene que decrecer de $[c, b]$ ya que $f(a) = f(b)$, por tanto $f(c)$ es un valor máximo de f y con eso $f'(c) = 0$

Figura 4.16: Ilustración teorema de Rolle caso 1.



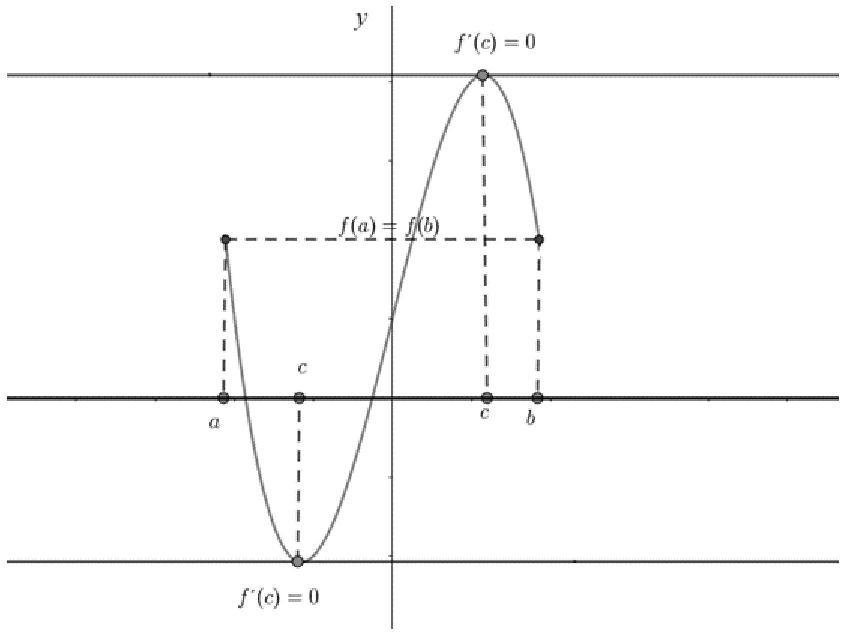
caso 2: La función decrece desde $[a, c]$ y luego tiene que crecer de $[c, b]$ ya que $f(a) = f(b)$, por tanto $f(c)$ es un valor mínimo de f y con eso $f'(c) = 0$

Figura 4.17: Ilustración teorema de Rolle caso 2.



caso 3: La función puede crecer y decrecer mas de una vez y como $f(a) = f(b)$ por lo tanto tendrá mas de un valor extremo máximo o mínimo y eso garantiza la existencia de $c \in [a, b]$ tal que $f'(c) = 0$

Figura 4.18: Ilustración teorema de Rolle caso 3.



4.18.5 Teorema del valor medio

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Demostración

La ecuación de la recta secante es: $y = y_0 + m(x - x_0)$ con

$$y_0 = f(a) \quad m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad x_0 = a$$

Tenemos que, $y = f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

Sea $g(x) = f(x) - y$, luego:

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Como f es continua y derivable además y es continua y derivable entonces $g(x)$

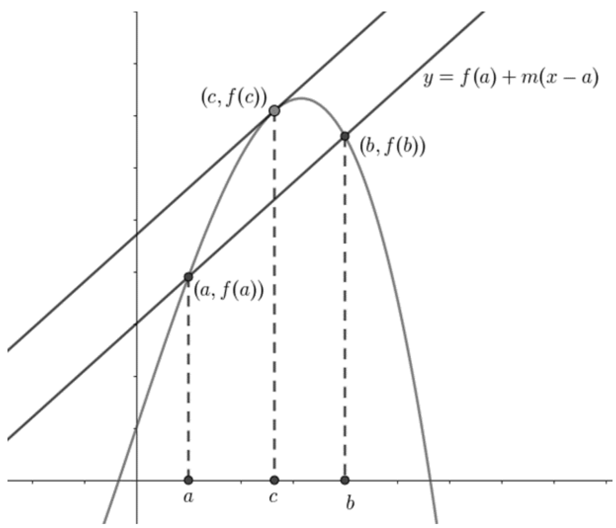
es continua y derivable. Ahora

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$
$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0$$

Aplicando el teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$ pero

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Figura 4.19: Ilustración teorema del valor medio



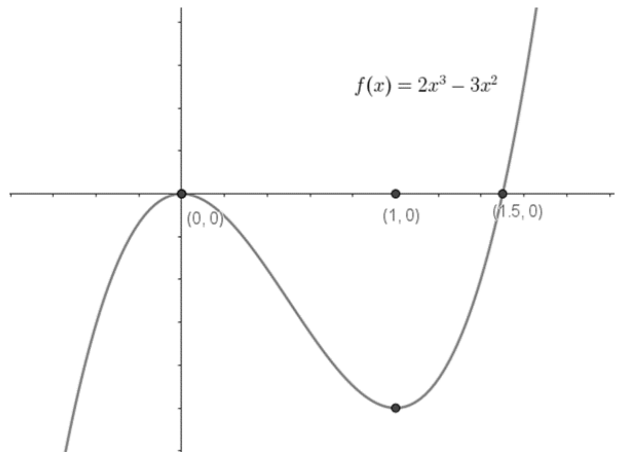
4.18.6 Criterio de la derivada para funciones crecientes y decrecientes

Recordemos que si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ se tiene que:

1. f es creciente en $[a, b]$ si siempre que $x_1 < x_2$ en $[a, b]$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$
2. f es decreciente en $[a, b]$ si siempre que $x_1 < x_2$ en $[a, b]$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$
3. f es constante en $[a, b]$ si $f(x_i) = f(x_j)$ para todo $x_i, x_j \in [a, b]$ con $x_i \neq x_j$

N Existen funciones que son crecientes y decrecientes. Por ejemplo $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ es creciente de $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ y decreciente en $[0, 1]$

Figura 4.20: Ilustración de función creciente y decreciente.



Teorema 4.2

Sea f una función derivable en $[a, b]$ entonces

1. f es creciente en $[a, b]$ si $f'(x) > 0$, para todo x en $[a, b]$
2. f es decreciente en $[a, b]$ si $f'(x) < 0$, para todo x en $[a, b]$

Ejemplo 4.21

Encuentre los intervalos donde $f(x) = x^4 - 4x^3$ es creciente o decreciente.

Solución

1. Hallamos $f'(x)$ e igualamos a cero para hallar los puntos críticos.
   $f(x) = x^4 - 4x^3$ luego $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ con lo que $f'(x) = 0$ si y solo si $4x^3 - 12x^2 \Leftrightarrow 4x^2(x - 3) = 0$, luego $x = 0$ o $x = 3$.
2. Verificamos el signo de $f'(x)$ a la derecha e izquierda de los puntos críticos.
   f es decreciente en $(-\infty, 3]$ y f es creciente en $[3, \infty)$

Tabla 4.3: Intervalos de crecimiento de la función $f(x) = x^4 - 4x^3$

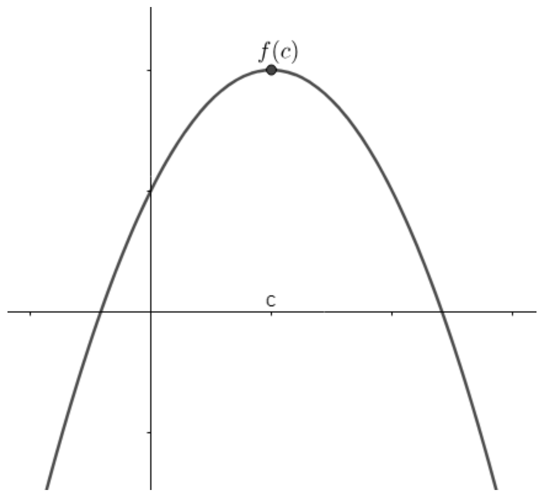
Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x \leq 3$	$3 \leq x < \infty$
Valor prueba	$x = -1$	$x = 1$	$x = 4$
Signo de $f'(x)$	$f'(-1) < 0$	$f'(1) < 0$	$f'(4) > 0$
Conclusión	Decreciente	Decreciente	Creciente

4.18.7 Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos

Sea $x = c$ un punto crítico de f en $[a, b]$, entonces

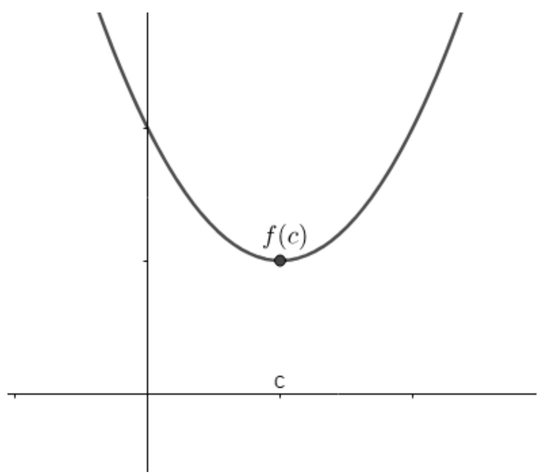
1. Si f cambia de creciente a decreciente en $x = c$, entonces $f(c)$ es un máximo de f

Figura 4.21: Ilustración cambio de creciente a decreciente.



2. Si f cambia de decreciente a creciente en $x = c$, entonces $f(c)$ es un mínimo de f

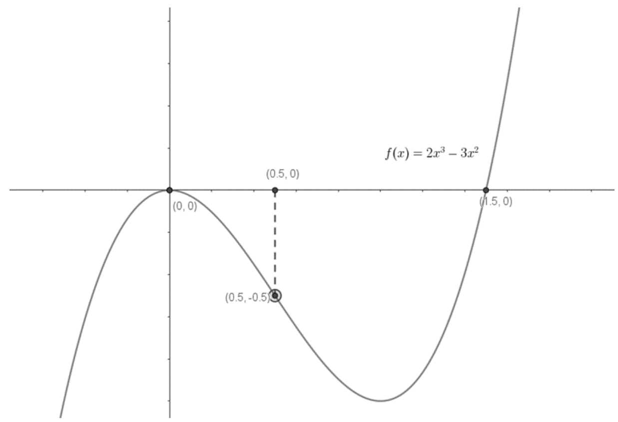
Figura 4.22: Ilustración cambio de decreciente a creciente.



4.18.8 Puntos de inflexión

Sea $i \in$ dominio de f, decimos que $x = i$ es un punto de inflexión de f si: $f''(i) = 0$ o no está definida.

Figura 4.23: Ilustración punto de inflexión.



Ejemplo 4.22

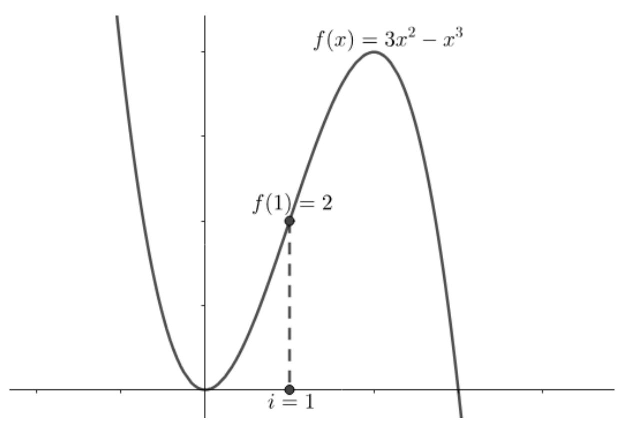
Encuentre los puntos de inflexión de la función $f(x) = 3x^2 - x^3$

Solución
Hallamos $f''(x)$ e igualamos a cero.

Tenemos que $f'(x) = 6x - 3x^2$, luego $f''(x) = 6 - 6x$

Con lo que $f''(x) = 0$ si y solo si $6 - 6x = 0$ por tanto, $x = 1$. Luego $i = 1$ es un punto de inflexión

Figura 4.24: Punto de inflexión $f(x) = 3x^2 - x^3$

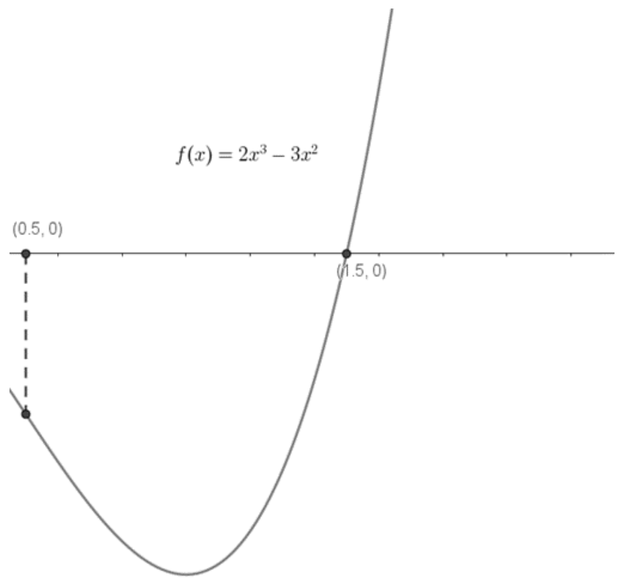


4.18.9 Concavidad

Sea f continua y derivable en un intervalo $[a, b]$, decimos que:

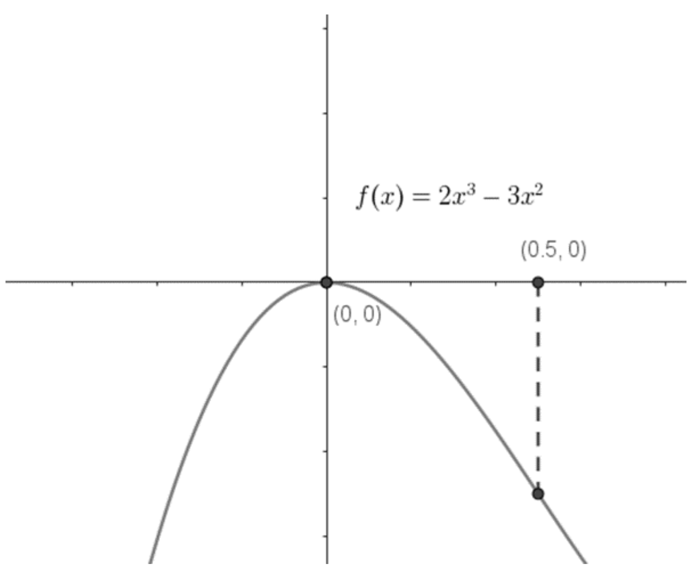
1. f es cóncava hacia arriba en $[a, b]$ si $f'(x)$ es creciente en $[a, b]$

Figura 4.25: Ilustración función cóncava hacia arriba.



2. f es cóncava hacia abajo en $[a, b]$ si $f'(x)$ es decreciente en $[a, b]$

Figura 4.26: Ilustración función cóncava hacia abajo.



N En los puntos de inflexión la función cambia su concavidad, es decir, pasa de ser cóncava hacia arriba a ser cóncava hacia abajo y visceversa.

4.18.10 Criterio de la segunda derivada para concavidad

Si f es continua y derivable en $[a, b]$, entonces

1. Si $f''(x) > 0$ para todo x en $[a, b]$ entonces f es cóncava hacia arriba en $[a, b]$
2. Si $f''(x) < 0$ para todo x en $[a, b]$ entonces f es cóncava hacia abajo en $[a, b]$

N Para hallar los intervalos de concavidad se verifica el signo de $f''(x)$ a la derecha e izquierda de los puntos de inflexión

Ejemplo 4.23

Hallar los intervalos de concavidad de la función $f(x) = 2x^2 - x^4$

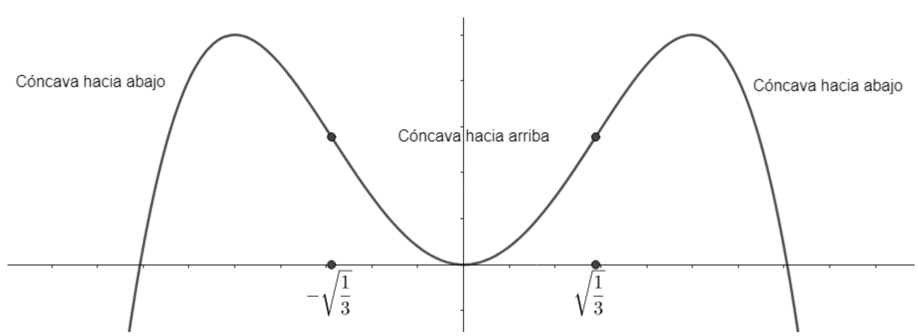
Solución

1. Hallamos los puntos de inflexión
   $f'(x) = 4x - 4x^3$, luego $f''(x) = 4 - 12x^2$ con eso $f''(x) = 0$ si y solo si $4 - 12x^2 = 0$ entonces $12x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \dfrac{4}{12} \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{1/3}$ son los puntos de inflexión
2. Verificamos el signo de $f''(x)$
   f es cóncava hacia arriba en $[-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}]$ y f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -\sqrt{1/3}] \cup [\sqrt{1/3}, \infty)$

Tabla 4.4: Intervalos de concavidad de la función $f(x) = 2x^2 - x^4$

Intervalo	$-\infty < x < -\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{1/3} < x < \sqrt{1/3}$	$\sqrt{1/3} < x < \infty$
Valor prueba	$x = -1$	$x = 1/2$	$x = 1$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(1/2) < 0$	$f''(1) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Figura 4.27: Intervalos de concavidad de la función $f(x) = 2x^2 - x^4$



4.18.11 Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

Sea $x = c$ un punto crítico de f en $[a, b]$ entonces

1. Si $f''(c) > 0$ entonces $f(c)$ es un mínimo de f
2. Si $f''(c) < 0$ entonces $f(c)$ es un máximo de f
3. Si $f''(c) = 0$ entonces el criterio no es concluyente.

Ejemplo 4.24

Encuentre los valores extremos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

Solución

1. Hallamos los puntos críticos
   $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ luego $f'(x) = 0$ si y solo si $3x^2 - 6x - 9 = 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0\\
&\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0\\
&\Rightarrow (x-3)(x+1) = 0\\
&\Rightarrow x = 3 \text{ o } x = -1
\end{aligned}$$

   Los posibles puntos críticos son $c_1 = -1$ y $c_2 = 3$

2. Hallamos la segunda derivada

$$f''(x) = 6x - 6$$

3. Evaluamos $f''(x)$ en los puntos críticos.
   $\Rightarrow$ Para $c_1 = -1$ tenemos $f''(c_1) = f''(-1) = -6 - 6 = -12$, luego $f''(c_1) < 0$ con lo que

$$\begin{aligned}
f(-1) &= (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 1\\
&= -1 - 3 + 9 + 1 = 6
\end{aligned}$$

   Es un máximo de f
   $\Rightarrow$ Para $c_2 = 3$ tenemos $f''(c_12) = f''(3) = 6(3) - 3 = 15$, luego $f''(c_2) > 0$ con lo que

$$\begin{aligned}
f(3) &= (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 1\\
&= 27 - 27 - 18 + 1 = -17
\end{aligned}$$

   Es un mínimo de f

Los valores extremos son: Máximo: $(-1, 6)$ y Mínimo: $(3, -17)$

Ejemplo 4.25

Use el criterio de la derivada para graficar la función: $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

Solución

1. Hallamos los puntos críticos.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1(x^2+4) - x(2x)}{(x^2+4)^2} \\
&= \frac{x^2+4-2x^2)}{(x^2+4)^2} \\
&= \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}
\end{aligned}
$$

Ahora $f'(x) = 0$ si y solo si: $\dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2} = 0$ luego $4 - x^2 = 0$ con lo que $x = \pm 2$.
Los puntos críticos son: $c_1 = -2$ y $c_2 = 2$

2. Hallamos los intervalos donde f es creciente o decreciente. Verificamos el signo de $f'(x)$ alrededor de los puntos críticos
f es creciente en $[-2, 2]$ y decreciente en $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

Tabla 4.5: Intervalos de crecimiento de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor prueba	$x = -3$	$x = 0$	$x = 3$
Signo de $f'(x)$	$f'(-3) < 0$	$f'(0) > 0$	$f'(3) < 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente

3. Hallamos los puntos de inflexión

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+4)^2 - (4-x^2)2(x^2+4)(2x)}{(x^2+4)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+4)[-2x(x^2+4)2 - (4-x^2)4x]}{(x^2+4)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^3 - 8x - 16x + 4x^3}{(x^2+4)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 24x}{(x^2+4)^3} \text{ luego}$$

$f''(x) = 0$ si y solo si $\dfrac{2x^3 - 24x}{(x^2+4)^3} = 0$ con lo que $2x^3 - 12x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 - 12) = 0$ luego $x = 0$ o $x^2 - 12 = 0$ con lo que $x = 0$ o $x = \pm 2\sqrt{3}$

Los puntos de inflexión son: $i_1 = -2\sqrt{3}$ $i_2 = 0$ $i_3 = 2\sqrt{3}$

4. Hallamos los intervalos de concavidad, verificamos el signo de $f''(x)$ alrededor de los puntos de inflexión.

Tabla 4.6: Intervalos de concavidad de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

Intervalo	$(-\infty, -2\sqrt{3})$	$(-2\sqrt{3}, 0)$	$(0, 2\sqrt{3})$	$(2\sqrt{3}, \infty)$
Valor prueba				
Signo de $f''(x)$				
Conclusión				

N Diligencia la tabla anterior y verifica que f es cóncava hacia arriba en: $(-2\sqrt{3}, 0) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, 2\sqrt{3})$

5. Hallamos los máximos y mínimos, verificamos el signo de $f''(x)$ en los puntos críticos.

   Los puntos críticos son $c_1 = -2$ y $c_2 = 2$.

   Como $-2 \in (-2\sqrt{3}, 0)$ entonces $f''(-2) > 0$ luego $f(-2) = \dfrac{-2}{-2^2+4} = \dfrac{-1}{4}$ es un mínimo de f

   Como $2 \in (0, 2\sqrt{3})$ entonces $f''(2) < 0$ luego $f(2) = \dfrac{2}{2^2+4} = \dfrac{1}{4}$ es un máximo de f

6. Graficamos: con la información de los pasos 1), 2), 3), 4), 5), se representa en el plano cartesiano la gráfica de la función tenemos que:

Figura 4.28: Puntos de inflexión y valores extremos de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

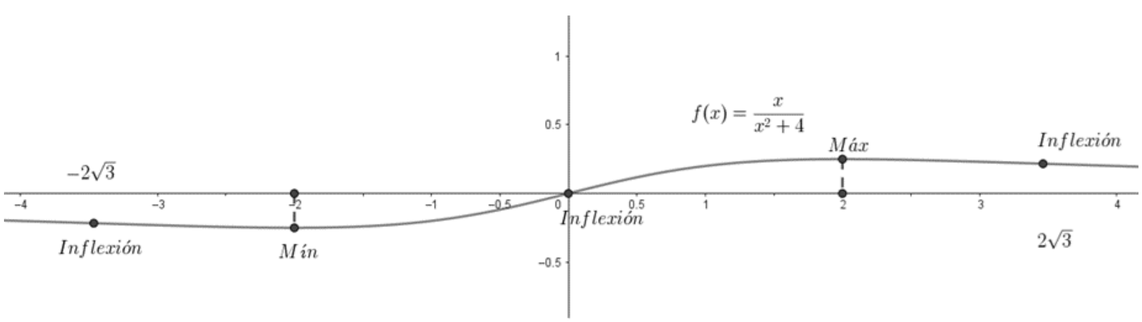


Figura 4.29: Rúbrica de evaluación del aprendizaje: Justifica las estrategias utilizadas en el proceso de modelación y resolución de problemas utilizando las técnicas de derivación (trazo de curvas y tasas de cambio relacionadas)

Criterio	Mínimo	Satisfactorio	Superior
Resolución de problemas	Comprende algunos aspectos de la situación por lo que logra encontrar una solución parcial o particular a problemas que involucran técnicas de derivación (trazo de curvas y tasas de cambio relacionadas).	Comprende la situación, formula y ejecuta soluciones correctas para problemas comunes o casos particulares, aunque puede tener dificultades con situaciones no cotidianas que involucran técnicas de derivación (trazo de curvas y tasas de cambio relacionadas).	Comprende y formula problemas con precisión en situaciones tanto cotidianas como no cotidianas. Encuentra y justifica soluciones óptimas y creativas para todo tipo de situaciones relacionadas con técnicas de derivación (trazo de curvas y tasas de cambio relacionadas)
Apropiación de conceptos	Muestra una comprensión superficial de conceptos o técnicas de derivación (trazo de curvas y tasas de cambio relacionadas), los utiliza para justificar o argumentar ideas, pero de manera limitada.	Comprende y utiliza adecuadamente conceptos o técnicas de derivación (trazo de curvas y tasas de cambio relacionadas) y aplicaciones de la derivada en situaciones cotidianas o simples.	Demuestra una comprensión robusta y detallada de los conceptos o técnicas de derivación (trazo de curvas y tasas de cambio relacionadas) y aplicaciones de la derivada y los utiliza correctamente en contextos variados y complejos.
Análisis y desarrollo de procedimientos	Desarrolla procedimientos básicos, o rutinarios en la solución de situaciones sencillas o cotidianas. Carece de un análisis detallado de los pasos a seguir.	Desarrolla procedimientos correctos y coherentes para situaciones comunes y cotidianas. Realiza un análisis adecuado del procedimiento utilizado para la solución de un problema o ejercicio.	Desarrolla procedimientos detallados y precisos para todo tipo de situaciones y realiza un análisis exhaustivo y lógico de los pasos a seguir y detecta errores en procedimientos realizados.
Uso del lenguaje matemático	Utiliza el lenguaje cotidiano para comunicar las ideas y justificar procedimientos y eventualmente usa términos y expresiones propias del lenguaje matemático.	Utiliza el lenguaje matemático de manera correcta y clara en la mayoría de las situaciones, usa terminología y expresiones adecuadas a la situación o al contexto	Utiliza el lenguaje matemático con precisión y claridad en todas las situaciones y comunica ideas complejas de manera efectiva haciendo uso apropiado del lenguaje matemático en cualquier contexto.

Fuente: Elaboración propia.

4.19 Guia de trabajo 4

1. Cierta cantidad de aceite se vierte hacia un depósito que tiene forma de cono con vértice hacia abajo con una rápidez de $\frac{3\pi m^3}{min}$ si el depósito tiene 2.5m de radio en su parte superior y una altura de 10m. Describir y fundamentar ¿Qué tan rápido sube el nivel del aceite cuando este es de 8m?

2. Dada la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, hallar la razón promedio de cambio de f en el intervalo $[1, 5]$, y la razón instantánea de cambio en $x = 2$ compare los resultados, luego construya un enunciado de una situación idealizada que pueda ser representada con esta función e interprete los resultados anteriores a la luz de la nueva situación.

3. Una epidemia de gripe ataca a una población de acuerdo con la fórmula $A(t) = \dfrac{150000000}{1 + 14699e^{-0{,}3466t}}$ donde A es la cantidad de personas infectadas y t es el tiempo en meses a partir del inicio. Fundamentar ¿Cuántos nuevos casos de personas infectadas por mes se presentan pasados los 20 meses?

4. Una población de 500 bacterias se introduce en un cultivo y crece en un número de acuerdo con la expresión $P(t) = 500\left(1 + \dfrac{4t}{50+t^2}\right)$ Donde t se mide en horas. Fundamentar el ritmo al que está creciendo la población para $t = 5$ horas. Interprete y explique los resultados

5. Teniendo en cuenta que $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ si el límite existe. Use lo anterior para calcular la derivada de $f(x) = 3x^2 - 4x^3$

6. Derivar $f(x) = \dfrac{1}{1-k} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) + \dfrac{\sqrt{k}}{1-k} \ln\left(\dfrac{1+kx}{1-kx}\right)$

7. Hallar $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en $(x^3 + x^3y^3)^2 = x^3 - x^3y^3$

8. La rentabilidad P medida en ingresos trimestrales, de la empresa SAB aumentó a medida que más de sus clientes hicieron operaciones en línea de acuerdo con la ecuación: $P(u) = 520u^2 - 300u + 100$ millones de dólares. Donde U es la fracción de operaciones hechas en línea. A su vez la fracción de operaciones realizada aumentó de acuerdo con la fórmula $U(t) = 0{,}42 + 0{,}02t$ (t= meses a partir de 1998) Describir y fundamentar. ¿Qué representa la expresión $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}U}$ y cuál es su valor? ¿Qué representa la variación de U con respecto al tiempo? Explique. Determinar $\left.\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right|_{t=4}$ e interprete los resultados.

9. Describa al menos dos procedimientos para determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 4x^3 - 9x + 5$ en el punto $x = 2$ realizar la gráfica.

10. Describa al menos dos procedimientos para determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \sqrt{x^2+25} - x^2$ en el punto $x = \sqrt{20}$ realizar la gráfica.

4.20 Optimización

La derivada de funciones de una variable juega un papel fundamental en la resolución de problemas de optimización, es decir, aquellos que buscan encontrar los valores máximos o mínimos de una función en un intervalo determinado. Estos problemas se encuentran en diversos contextos, desde la física y la ingeniería hasta la economía y las ciencias sociales, permitiendo modelar y analizar situaciones que involucran la búsqueda de valores óptimos.

Imagina un jardinero que desea cercar un terreno rectangular con la menor cantidad de material posible. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo para lograr este objetivo? La solución a este problema se encuentra en las aplicaciones de la derivada para máximos y mínimos ya que permite determinar las dimensiones que minimizan el perímetro del rectángulo, optimizando así el uso del material.

En el campo de la biología, las derivadas se utilizan para modelar el crecimiento de poblaciones o la propagación de enfermedades. Al encontrar los máximos o mínimos de estas funciones, se puede obtener valiosa información para la toma de decisiones en el manejo de estas situaciones.

En el ámbito de la economía, las derivadas se utilizan para analizar la función de utilidad de un consumidor, la cual representa el nivel de satisfacción que obtiene al consumir diferentes cantidades de un bien. Al encontrar el máximo de la función de utilidad, se determina la cantidad óptima de consumo que maximiza la satisfacción del consumidor.

4.20.1 Proceso de optimización

Aquí la optimización se entiende como el proceso mediante el cual se determinan los extremos de una función que modela una situación de un contexto determinado. Esto implica

1. Hallar los puntos críticos.
2. Hallar intervalos donde f es creciente o decreciente.
3. Hallar puntos de inflexión.
4. Hallar intervalos de concavidad.
5. Hallar máximos y mínimos.
6. Graficar.

N Existen situaciones reales donde es conveniente calcular máximos y mínimos a estas situaciones las llamamos problemas de optimización y para resolverlo conviene.

1. Hacer un bosquejo o dibujo de la situación si es posible.
2. Identificar y asignar las variables relacionadas.
3. Identificar la función a optimizar.
4. Encontrar una ecuación auxiliar que exprese la relación entre las variables.
5. Hallar los valores extremos usando criterio de la derivada.

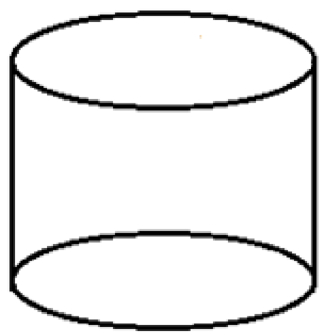
Ejemplo 4.26

Una empresa productora de alimentos desea comercializar un producto (antipasto), para tal fin decidieron usar un recipiente en forma de cilindro que contenga $500cm^3$, ¿cuáles deben ser las dimensiones del recipiente para que el gasto de material sea mínimo?

Solución

1. Ilustramos la situación

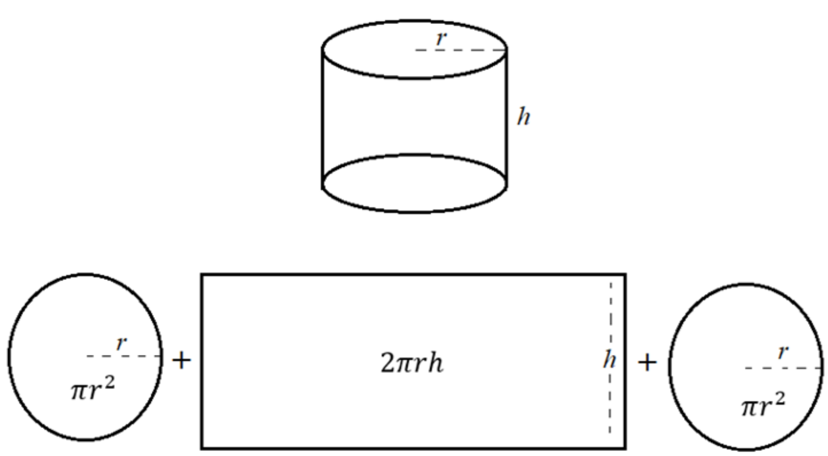
Figura 4.30: Ilustración de cantidad de material necesitado



2. Asignamos variables
   Sean r y h las dimensiones del recipiente:

$$R := \text{ radio de la base}$$
$$h := \text{ altura}$$

Figura 4.31: Ilustración de cantidad de material necesitado



3. Definimos la función a optimizar
La función a optimizar es la cantidad de material, es decir. Área de las tapas más área lateral.

$$C = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

4. Buscamos una ecuación auxiliar que relacione las variables
El volumen del cilindro debe ser $500cm^3$, esto es:

$$\pi r^2 h = 500 \Rightarrow h = \frac{500}{\pi r^2}\,,\, r \neq 0$$

Con eso en la función a optimizar queda:

$$C(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{500}{\pi r^2} \Rightarrow C(r) = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$$

5. Hallamos los valores extremos
Tenemos que: $C(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{1000}{r}$, hacemos $C'(r) = 0$ para poder hallar los puntos críticos de la función.
$C'(r) = 4\pi r - \dfrac{1000}{r^2}$, pero $C'(r) = 0$ si y solo si $4\pi r - \dfrac{1000}{r^2} = 0$, obteniendo

$$\frac{4\pi r^3 - 1000}{r^2} = 0$$

con eso $4\pi r^3 - 1000 = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 = 1000 \Rightarrow r^3 = \dfrac{250}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{250}{\pi}}$
$r \approx 4{,}3cm$
Ahora hacemos $C''(r)$ para encontrar máximos y mínimos.

$$C''(r) = 4\pi + \frac{2000}{r^3}$$

Evaluamos $C''(r)$ en el punto crítico.

$$\begin{aligned} C''\left(\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}\right) &= 4\pi + \frac{2000}{\frac{250}{\pi}} \\ &= 4\pi + 8\pi = 12\pi \end{aligned}$$

Luego $C''(r) > 0$ en $r < \sqrt{\dfrac{250}{\pi}}$, con lo que:

$$C\left(\sqrt{\frac{250}{\pi}}\right) = 2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}\right)^2 + \frac{1000}{\sqrt{\frac{250}{\pi}}} \text{ es mínimo, con lo que}$$

$$h = \frac{500}{\pi\left(\frac{250}{\pi}\right)^{2/3}} \Rightarrow h \approx 8{,}6cm$$

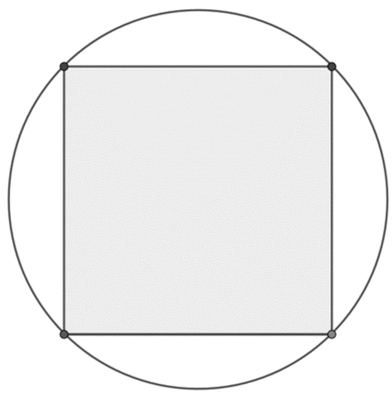
Ejemplo 4.27

Encontrar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se pueda inscribir en una circunferencia de radio R

Solución

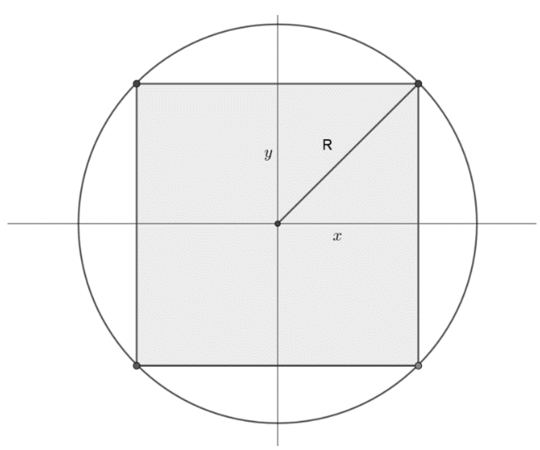
1. Hacemos un bosquejo de la situación

Figura 4.32: Bosquejo de la situación



2. Asignamos variables
   Sea $2x := largo$ y $2y := ancho$

Figura 4.33: Asignación de variables en la situación



3. Definimos la función a optimizar
   La función a optimizar es el área del rectángulo inscrito

$$A = 4xy$$

4. Buscamos una ecuación auxiliar que relacione las variables
El punto (x, y) está sobre la circunferencia, luego $x^2+y^2 = R^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$, con lo que

$$A(x) = 4x\sqrt{R^2 - x^2}$$

5. Hallamos los valores extremos
   - $A(x) = 4x\sqrt{R^2 - x^2}$ luego

$$A'(x) = 4\sqrt{R^2 - x^2} + 4x\frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}}$$
$$A'(x) = 4\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$
$$A'(x) = \frac{4(R^2 - x^2) - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$
$$A'(x) = \frac{4R^2 - 8x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

   - Hacemos $A'(x) = 0$ luego $\dfrac{4R^2 - 8x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0$ si y solo si $4R^2 - 8x^2 = 0$, luego $4R^2 = 8x^2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{R^2}{2} \Rightarrow x = \dfrac{R}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}R}{2}$
$x = \dfrac{\sqrt{2}R}{2}$
   - Hallamos $A''(x)$

$$A''(x) = \frac{-16x\sqrt{R^2 - x^2} - (4R^2 - 8x^2)\dfrac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}}}{(\sqrt{R^2 - x^2})^2}$$
$$A''(x) = \frac{-16x\sqrt{R^2 - x^2} + \dfrac{(4R^2 - 8x^2)x}{\sqrt{R^2 - x^2}}}{R^2 - x^2}$$
$$A''(x) = \frac{-16x(R^2 - x^2) + 4R^2x - 8x^3}{(R^2 - x^2)(\sqrt{R^2 - x^2})}$$
$$A''(x) = \frac{-12xR^2 - 24x^3}{(R^2 - x^2)^{3/2}}$$

Como $x = \dfrac{\sqrt{2}R}{2} > 0$ además $R > x$ entonces $A''(x) < 0$ luego $A(x)$ tiene un máximo en $x = \dfrac{\sqrt{2}R}{2}$

$$A\left(\frac{\sqrt{2}R}{2}\right) = 4\frac{\sqrt{2}R}{2}\sqrt{R^2 - \left(\frac{\sqrt{2}R}{2}\right)^2}$$
$$A\left(\frac{\sqrt{2}R}{2}\right) = 2\sqrt{2}R\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}}$$
$$A\left(\frac{\sqrt{2}R}{2}\right) = 2\sqrt{2}R\sqrt{\frac{R^2}{2}}$$
$$A\left(\frac{\sqrt{2}R}{2}\right) = 2RR = 2R^2$$

Luego el área es $A = 2R^2$
Por otro lado

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$
$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\sqrt{2}R}{2}\right)^2}$$
$$y = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}}$$
$$y = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}R}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{2}R}{2}$$

Ejemplo 4.28

Hallar los valores de a, b, c y d tales que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo en $(0, 0)$ y un máximo en $(2, 2)$

Solución

1. Hallamos $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
   Como $x = 0$ es un punto crítico, $f'(0) = 0$, es decir

$$3a(0)^2 + 2b(0) + c = 0$$
$$c = 0$$

   Además $x = 2$ es un punto crítico, entonces $f'(2) = 0$

$$3a(2)^2 + 2b(2) + c = 0$$
$$12a + 4b = 0$$

Obteniendo así

$$3a + b = 0 \tag{4.2}$$

2. Como $(0,0)$ es mínimo $f(0) = 0$ luego

$$\begin{aligned} a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d &= 0 \\ d &= 0 \end{aligned}$$

3. Como $(2,2)$ es máximo $f(2) = 2$ luego

$$\begin{aligned} a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d &= 2 \\ 8a + 4b &= 2 \end{aligned}$$

Obteniendo así

$$4a + 2b = 1 \tag{4.3}$$

Resolviendo (4.2) y (4.3), tenemos que $a = \frac{-1}{2}$ y $b = \frac{3}{2}$

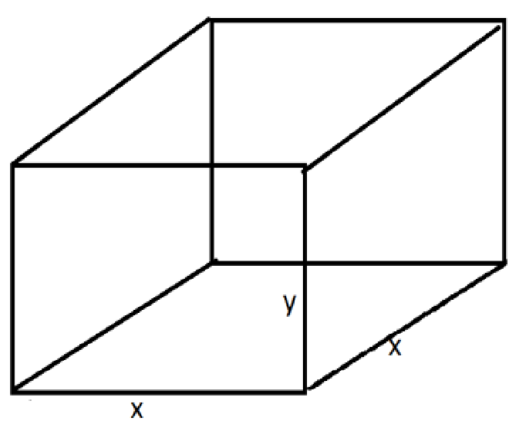
Ejemplo **4.29**

Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de $32000cm^3$. Halle las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado, es decir, que minimicen el área de su superficie.

Solución

Primero hacemos un dibujo para identificar en él las cantidades dadas y pedidas

Figura 4.34: Bosquejo de la situación



Definición de variables: Sean x la longitud del lado de la base, y la longitud de la altura de la caja y A el área de la superficie de la caja. Entonces:

$$A = x^2 + 4xy \tag{4.4}$$

Debemos expresar A en términos de una sola variable x o y. Para ello usamos el hecho de que:

$$V = 32000 = x^2 y$$

Despejamos y:

$$y = \frac{32000}{x^2} \tag{4.5}$$

Ahora sustituimos (4.4) en (4.5):

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2 + 4x\left(\frac{32000}{x^2}\right) \\ &= x^2 + \frac{128000}{x^2} \end{aligned}$$

Observe que $x > 0$ y además si $y \to 0^+$ entonces $x \to +\infty$, por lo tanto $D_P = (0, +\infty)$.

Entonces la función que deseamos minimizar es:

$$A(x) = x^2 + \frac{128000}{x^2}, \; x \in (0, +\infty)$$

Hallemos el mínimo absoluto de A en $(0, +\infty) : A$ es continua en $(0, +\infty)$ y

$$A'(x) = 2x - \frac{128000}{x^2}$$

Luego $A'(x)$ existe para todo x en $(0, +\infty)$. Además

$$\begin{aligned} A'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x - \frac{128000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = 128000 \\ &\Leftrightarrow x^3 = 64000 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{64000} \Leftrightarrow x = 40 \end{aligned}$$

Por tanto $x = 40$ es el único número crítico de A en $(0, +\infty)$.

Utilizamos ahora el criterio de la segunda derivada para extremos locales:

$$\begin{aligned} A''(x) &= 2 + 2\frac{128000}{x^3} \\ &= 2 + \frac{256000}{x^3} \end{aligned}$$

Como $A''(40) = 6 > 0$ entonces en $x = 40$ hay un mínimo local y puesto que $x = 40$ es el único número en $(0, +\infty)$ para el cual A tiene un extremo local entonces por teorema se tiene que A tiene un mínimo absoluto en $x = 40$.

Hallemos y:

$$y = \frac{32000}{(40)^2} = 20$$

Luego, la caja debe medir $40cm$ en el lado de la base y $20cm$ en la altura de la caja.

Figura 4.35: Rúbrica de evaluación del aprendizaje: Resuelve problemas relacionados con procesos de optimización en contextos determinados, haciendo uso adecuado de los criterios de la derivada

Criterio	Mínimo	Satisfactorio	Superior
Resolución de problemas	Comprende algunos aspectos de la situación por lo que logra encontrar una solución parcial o particular a problemas que involucran procesos de optimización y aplicaciones de la derivada.	Comprende la situación, formula y ejecuta soluciones correctas para problemas comunes o casos particulares, aunque puede tener dificultades con situaciones no cotidianas que involucran procesos de optimización y aplicaciones de la derivada.	Comprende y formula problemas con precisión en situaciones tanto cotidianas como no cotidianas. Encuentra y justifica soluciones óptimas y creativas para todo tipo de situaciones relacionadas con procesos de optimización y aplicaciones de la derivada
Apropiación de conceptos	Muestra una comprensión superficial de conceptos o procesos de optimización y aplicaciones de la derivada, los utiliza para justificar o argumentar ideas, pero de manera limitada.	Comprende y utiliza adecuadamente conceptos o procesos de optimización y aplicaciones de la derivada en situaciones cotidianas o simples.	Demuestra una comprensión robusta y detallada de los conceptos o procesos de optimización y aplicaciones de la derivada y los utiliza correctamente en contextos variados y complejos.
Análisis y desarrollo de procedimientos	Desarrolla procedimientos básicos, o rutinarios en la solución de situaciones sencillas o cotidianas. Carece de un análisis detallado de los pasos a seguir.	Desarrolla procedimientos correctos y coherentes para situaciones comunes y cotidianas. Realiza un análisis adecuado del procedimiento utilizado para la solución de un problema o ejercicio.	Desarrolla procedimientos detallados y precisos para todo tipo de situaciones y realiza un análisis exhaustivo y lógico de los pasos a seguir y detecta errores en procedimientos realizados.
Uso del lenguaje matemático	Utiliza el lenguaje cotidiano para comunicar las ideas y justificar procedimientos y eventualmente usa términos y expresiones propias del lenguaje matemático.	Utiliza el lenguaje matemático de manera correcta y clara en la mayoría de las situaciones, usa terminología y expresiones adecuadas a la situación o al contexto	Utiliza el lenguaje matemático con precisión y claridad en todas las situaciones y comunica ideas complejas de manera efectiva haciendo uso apropiado del lenguaje matemático en cualquier contexto.

Fuente: Elaboración propia.

4.21 Guia de trabajo 5

1. Analizar y fundamentar los valores que pueden tomar a, b, c y d de tal forma que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tenga un mínimo relativo en $(0, 0)$ y un máximo relativo en $(2, 2)$. Ilustre la solución con una gráfica, señale intervalos de crecimiento y de concavidad.

2. Dada $f(x) = x\sqrt{x+3}$, describir y fundamentar cuáles son los puntos críticos, los intervalos donde f es creciente o decreciente, puntos de inflexión, intervalos de concavidad. Tome la información anterior para realizar su gráfica y compare con el resultado en un programa graficador.

3. Dada $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}$, describir y fundamentar cuáles son los puntos críticos, los intervalos donde f es creciente o decreciente, puntos de inflexión, intervalos de concavidad. Tome la información anterior para realizar su gráfica y compare con el resultado en un programa graficador.

4. La concentración de un fármaco en la sangre, t horas después de ser inyectado en el tejido muscular viene dado por $C(t) = \dfrac{t-3}{t^2}$, en qué intervalo de tiempo la concentración aumenta y cuándo disminuye. Cuándo es máxima y cuál es esa concentración. ¿A partir de las cuántas horas el fármaco dejará de surtir efecto? Fundamente su respuesta.

5. Describir y fundamentar cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una elipse centrada en el origen cuyo semieje mayor está sobre el eje y con longitud 26 y semieje menor de longitud 10.

6. Se desea construir un paquete para empaque de dulces de manera que tenga forma de pirámide con base cuadrada, si el volumen de cada dulce es $0{,}8cm^3$ y el paquete debe contener 50 dulces. Describir y fundamentar ¿Cuáles son las dimensiones del paquete que producen los gastos mínimos?

Referencias

Adams, R. A. y Essex, C. (2017) *Calculus: A Complete Course (9th ed.)* Pearson.

Ayres, F. J. (1999) *Cálculo Diferencial e Integral* (3ra). México: McGraw-Hill, serie Schaum.

Briggs, W. L., Cochran, L. y Gillett, B. (2015) *Single Variable Calculus: Early Transcendentals (2nd ed.)* Pearson.

Briggs, W. L., Cochran, L., Gillett, B. y Schulz, E. (2013) *Calculus for Scientists and Engineers: Early Transcendentals (1st ed.)* Pearson.

Bronson, R. y Goza, J. (2019) *Matemáticas para Ingenieros* (9ª). Pearson Educación.

Courant, R. (2011) *Differential and Integral Calculus, Volume 1.* Martino Fine Books.

D. E. Varberg, S. A. P. y Rigdon, S. E. (2014) *Cálculo* (2ª). Cengage Learning.

Demidovich, B. (s.f.) *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemáticos* (7ma). Moscú: Editorial Mir.

Granville, W. A. (1970) *Cálculo Diferencial e Integral.* México.

H. Anton, R. B. y Davis, C. (2021) *Cálculo con Geometría Analítica* (12ª). Pearson Educación.

Jr., G. B. T. y Finney, R. L. (s.f.) *Cálculo de una Variable* (9a). E.U.A: Pearson Adisson-Wesley Longman.

Jr., G. B. T. y Finney, R. L. (1987) *Cálculo con Geometría Analítica* (6ta). E.U.A: Adisson-Wesley Iberoamericana S.A.

Kreyszig, E. (2010) *Advanced Engineering Mathematics (10th ed.)* Wiley.

Lang, S. (2012) *A First Course in Calculus (5th ed.)* Springer.

Larson, H. y. E. (1995) *Cálculo y Geometría Analítica* (5ta). España: McGraw Hill.

Leithold, L. [L.]. (1981) *Calculus and Analytic Geometry (5th ed.)* HarperCollins Publishers.

Leithold, L. [Louis]. (1992) *El Cálculo con Geometría Analítica* (6ta). México: Editorial Harla.

Leithold, L. [Louis]. (1998) *Matemáticas previas al Cálculo* (2da). México: Editorial Harla.

Marsden, J. E. y Weinstein, A. J. (2020) *Cálculo Diferencial e Integral* (10ª). Cengage Learning.

Spivak, M. (2008) *Calculus (4th ed.)* Publish or Perish.

Stewart, J. [J.]. (2015) *Calculus: Early Transcendentals (8th ed.)* Cengage Learning.

Stewart, J. [James]. (1999) *Cálculo: Conceptos y Contextos*. México: Internacional Thomson Editores.

Stewart, J. [James]. (2021) *Cálculo Diferencial e Integral* (8ª). Cengage Learning.

Swokowski, E. W. (1989) *El Cálculo con Geometría Analítica* (2da). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Thomas, G. B., Weir, M. D. y Hass, J. (2016) *Calculus (14th ed.)* Pearson.

Antes de los trabajos de Newton y Leibniz, otros matemáticos ya habían hecho contribuciones significativas que prepararon el terreno para el desarrollo del cálculo. Pierre de Fermat, por ejemplo, había desarrollado un método para encontrar máximos y mínimos de funciones, que más tarde sería reconocido como una forma temprana del cálculo diferencial. René Descartes, conocido por su trabajo en geometría analítica, proporcionó herramientas para el estudio de las curvas, lo que sería esencial para el desarrollo posterior del cálculo. Christiaan Huygens, otro matemático destacado, trabajó en la comprensión de las leyes del movimiento, mientras que Isaac Barrow, maestro de Newton, desarrolló importantes ideas sobre la tangencia y las áreas bajo curvas, anticipando conceptos clave del cálculo.

Universidad de Sucre

UNISUCRE EDITORIAL